Rosemberg Toalá Enríquez

Geometría y trigonometría

Book Mart
MÉXICO

Primer parcial

Eje: Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométrico y trigonométrico

- Estructura y transformación: elementos básicos de geometría

- Conceptos básicos del espacio y la forma: lo geométrico.
- El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades.

- Elementos, características y notación de los ángulos.
- Sistemas angulares de medición: ¿cómo realizar las conversiones de un sistema a otro?, ¿por qué existen varias formas de medir ángulos?, ¿cuáles son las razones por las cuales se hacen las conversiones?
- Propiedades de los triángulos según sus lados y ángulos: ¿qué los identifica entre sí?, ¿qué los diferencia entre sí?, ¿por qué los triángulos son estructuras rígidas usadas en las construcciones?
- Característica de las sumas de ángulos internos en triángulos y de polígonos regulares: ¿por qué la configuración y la reconfiguración espacial de figuras sirve para tratar con situaciones contextuales de la geometría?
- Propiedades de los polígonos regulares.
- Elementos y propiedades básicas de los ángulos en la circunferencia.

- Distingue conceptos básicos de: recta, segmento, semirecta, línea curva.
- Interpreta los elementos y las características de los ángulos.
- Mide manual e instrumentalmente los objetos trigonométricos y da tratamiento a las relaciones entre los elementos de un triángulo.
- Trabaja con diferentes sistemas de medición de los ángulos, realiza conversiones de medidas.
- Identifica, clasifica y caracteriza a las figuras geométricas.
- Interpreta las propiedades de las figuras geométricas.

- Convertir de un sistema de medición a otro, medidas angulares.
- Trazar y medir ángulos con instrucciones determinadas.
- Medir y estimar ángulos.
- Construir triángulos con lados dados, con dos lados y un ángulo dado, o con un lado y dos ángulos dados.
- Reconfigurar visualmente una figura geométrica en partes dadas.
- Estimar y comparar superficies y perímetros de figuras rectilíneas.
- Calcular y argumentar en cuerpos sólidos, ¿cuál volumen es mayor?

Habilidades socioemocionales

¿Para qué soy bueno (a) y en qué me gustaría mejorar?

¿Has pensado cuáles son tus fortalezas? ¿Para qué eres bueno? ¿Qué te apasiona? Algunas veces es muy obvio, otras no tanto. Reconocer nuestras fortalezas nos ayuda a tener mayor confianza en nosotros mismos. Por otro lado, si tienes claro cuáles son tus debilidades o aspectos que deseas mejorar, puedes empezar a hacer algo al respecto. En esta lección para aprender a reconocer nuestras fortalezas y nuestras debilidades.

1. En tres minutos, en cualquier hoja en blanco, haz una lluvia de ideas escribiendo todas las que te vengan a la mente sobre cuáles son tus debilidades; luego haz otra sobre tus fortalezas. Cuando termines selecciona cinco y llena la siguiente tabla. Para pensar en tus fortalezas te puede ayudar recordar lo que te gusta y te apasiona. Por ejemplo "soy bueno escuchando a la gente" es una fortaleza, o bien, "me cuesta trabajo concentrarme en clase" es una debilidad. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y escribe más fortalezas y debilidades.

¿Para qué soy bueno? Fortalezas	¿Qué me cuesta trabajo? Debilidades
1.	2.
3.	4.

2. Ahora te proponemos visualizar tus fortalezas y debilidades como los árboles y las plantas de un jardín. Los árboles más grandes y sanos representan tus fortalezas. Las plantas más pequeñas y frágiles representan tus debilidades. ¿Qué fortalezas y debilidades hay en tu jardín? Escríbelas sobre cada uno de los árboles y las plantas.
3. Reflexionen en equipos de tres ¿por qué es importante conocer nuestras fortalezas y debilidades?
4. ¿Cómo te sientes después de haber identificado algunas de tus fortalezas? ¿Descubriste algo nuevo al diseñar tu bosque de fortalezas y debilidades o en la reflexión en grupo? ¿Qué fue?

Para saber más

Si quieres conocer una estrategia para encontrar qué te apasiona y en qué eres bueno, puedes consultar el libro "El elemento", de Ken Robinson, Editorial De Bolsillo, 2017, España; o bien, ver uno de sus videos. Puedes buscar en Google el libro titulado "El elemento", o darle clic en el link. http://bkmrt.com/2Ir7KD

Para tu vida diaria

¿Hay algo que hace mucho no haces y te encantaba? ¿Podrías organizarte para hacerlo esta semana? Anota tu experiencia.

____

____

____

____

Resumen

Conocer tus fortalezas y debilidades es parte importante del proceso de conocerte a ti mismo. Saber cuáles son tus fortalezas te da confianza e inspiración. Reconocer para lo que eres bueno, te hace sentir conectado con el mundo, capaz de hacer cosas y de expresar quién eres. Identificar tus debilidades es el primer paso para analizarlas y decidir qué quieres hacer con ellas.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

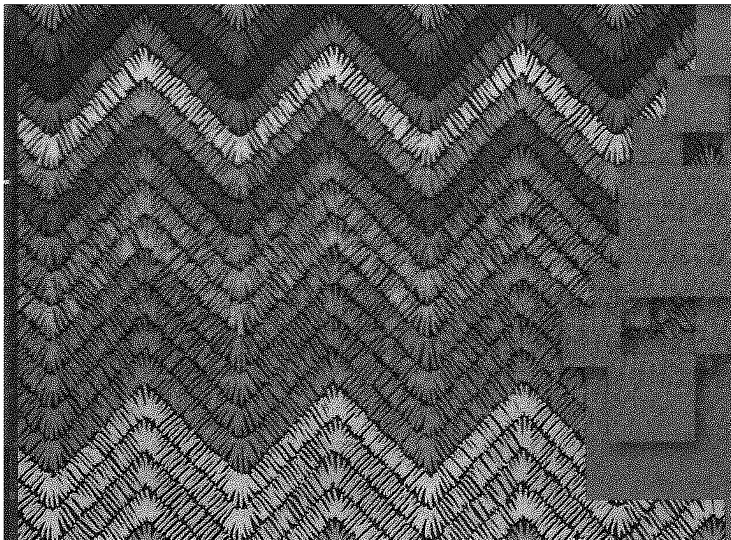
1. Organiza la información de tu Proyecto de vida.
2. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
3. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

4. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama general de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
5. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
6. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ____

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



DESARROLLO

Elementos, características y notación de los ángulos

Elementos y notación

Para saber más

Todo lo que vamos a aprender en este libro ¡ya lo sabían los griegos hace más de 2 000 años!

***Elementos* es un libro escrito por Euclides alrededor del año 300 a.n.e. y contiene mucho de las matemáticas conocidas por los griegos hasta entonces.**

Al hablar de geometría nos encontramos con dos conceptos claves: puntos y líneas; a partir de ellos podemos construir todos los demás objetos geométricos. En este tema estableceremos una notación para referirnos a éstos y otros conceptos. Al mismo tiempo, repasaremos las nociones de línea recta, rayo, segmento y ángulo.

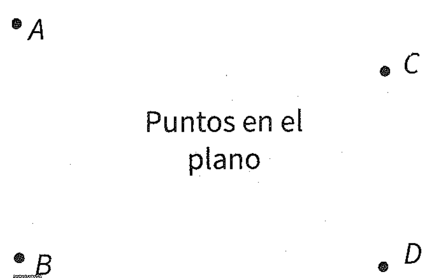


Figura 1.1

Punto (figura 1.1). En el plano hay infinidad de puntos, al elegir uno le ponemos nombre. En este libro usaremos letras mayúsculas para denotar puntos: *A*, *B*, *C*, *D*, etcétera. Es un ejercicio interesante pensar: ¿cómo se define un punto? Anota tu respuesta en tu cuaderno y platícalo con tus compañeros.

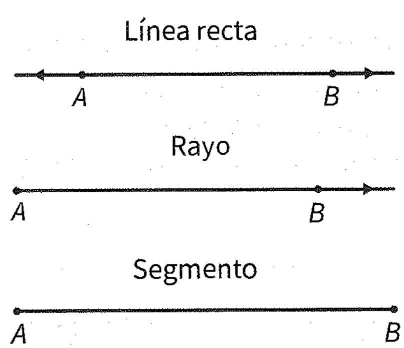


Figura 1.2

Línea recta (figura 1.2). Para cualesquiera dos puntos en el plano hay una única línea recta que los une. Al hablar de línea recta se debe entender que ésta se extiende indefinidamente hacia ambos sentidos.

Rayo (figura 1.2). Es la porción de una línea recta que se extiende indefinidamente y sólo hacia un sentido.

Segmento (figura 1.2). Es la porción de una línea recta que está delimitada por dos puntos. A éstos se les llama extremos del segmento.

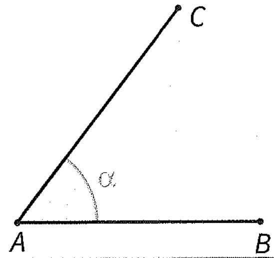


Figura 1.3

Ángulo (figura 1.3). Es la apertura determinada por dos segmentos. Si los segmentos son *AB* y *AC* como se muestra en la imagen de al lado, entonces denotamos al ángulo como $\angle BAC$. Al punto A se le llama vértice del ángulo, *AB* es el lado inicial y *AC* el final. Cuando el contexto es claro, sólo escribimos $\angle A$ o lo denotamos con una letra griega, en este caso α.

Sistema sexagesimal

Ahora, ¿cómo medimos un ángulo? En principio, cualquier cosa que mida "la abertura" del ángulo funciona. Tradicionalmente usamos dos unidades o escalas para medir ángulos: grados y radianes.

El sistema sexagesimal tiene como base al círculo y lo divide en 360 partes iguales, de ahí recibe su nombre. A las unidades se les llama grados y su símbolo es: °. Para medir un ángulo en grados se usa un transportador como se ve en las figuras 1.4 y 1.5.

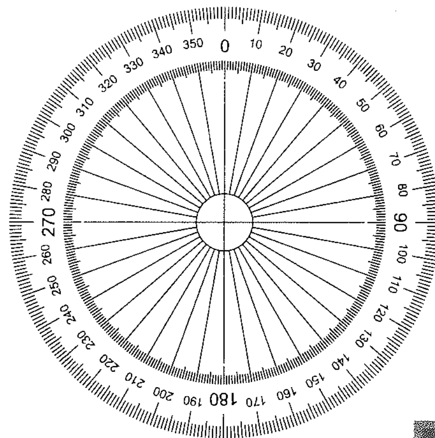


Figura 1.4

Transportador de 360°.

Un transportador consiste en un círculo, o un semicírculo, en el cual se marcan las unidades de 0° a 360°, o de 0° a 180°, de esta manera, podemos medir la apertura de un ángulo al hacer coincidir el vértice del ángulo con el centro del transportador y al lado inicial del ángulo con la marca de 0°. Así, la medida del ángulo queda determinada por la marca que indique el segundo segmento del ángulo.

Para trazar un ángulo de cierta abertura se coloca el centro del transportador en el vértice del ángulo y se hace coincidir el lado inicial con el 0°. Se cuentan tantas rayitas, como grados mida el ángulo, en sentido contrario de la manecillas del reloj y se pone una marca. Se retira el transportador y se unen el vértice y la marquita colocada.

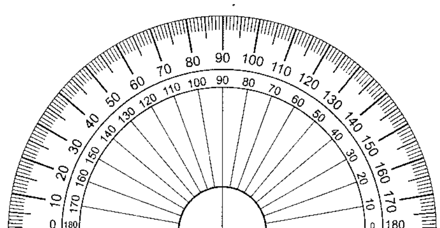


Figura 1.5

Transportador de 0° a 180°.

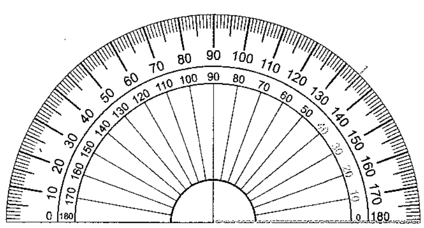
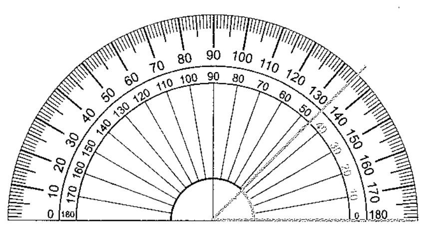
Para saber más

¿Por qué 360°? Se cree que se debe a su cercanía con el número de días en el año, 365.

Además, es fácil dividir 360° en partes iguales. Por ejemplo, es posible dividir 360 en dos partes iguales, en tres, cuatro, seis, ocho, nueve, quince,etcétera.

Ejemplo

Para trazar un ángulo de 45°, dado que tenemos el lado inicial, hacemos lo siguiente:

Paso 1. Una vez colocado el transportador, se cuentan 45 rayitas en sentido contrario de las manecillas del reloj y se coloca una marca.	**Paso 2.** Se unen la marca con el vértice del ángulo. En la imagen se mantuvo el transportador de fondo para comprobar que es un ángulo de 45°.
	

Clasificación de los ángulos por su abertura

Debido a las simetrías del círculo, así como en los relojes los números 12, 3, 6 y 9 sirven de referencia, los ángulos 90°, 180°, 270° y 360° son referencias para clasificar al resto de los ángulos de acuerdo a si son menores, iguales o mayores a ellos:

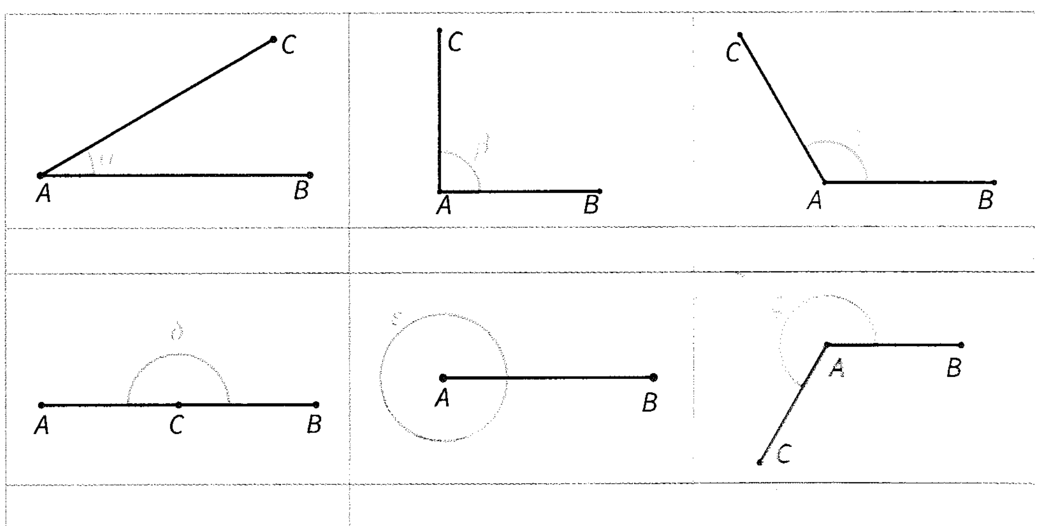
- Un ángulo es **agudo** si mide menos de 90° y es mayor o igual que 0°.
- Un ángulo **recto** es aquel que mide exactamente 90° y se marca con un cuadrito.
- Un ángulo es **obtuso** si mide más de 90° y menos de 180°.
- Un ángulo **llano** es aquel que mide exactamente 180°.
- Un ángulo es **cóncavo** si mide más de 180° y menos de 360°.

Aquí hemos hablado de ángulos que van de 0° a 360°. Cabe aclarar que es posible hacer la distinción entre ángulos positivos y negativos: los ángulos positivos se miden en dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que los ángulos negativos se miden en dirección de las manecillas del reloj. También se puede hablar de ángulos de más de 360°, por ejemplo, un ángulo de 390° se ve igual que uno de 30° y no los podemos distinguir, te invito a que hagas un dibujo en tu cuaderno para que compruebes esta afirmación. Es por esto que este tipo de sutilezas sólo le interesan a los matemáticos por razones teóricas, en la práctica sólo usamos la escala de 0° a 360° para medir ángulos.

Actividad de aprendizaje 1

Utiliza lo aprendido anteriormente para responder lo que se pide.

1. Usa un transportador para medir estos ángulos e indica qué tipo de ángulo es.



2. Utiliza un transportador para trazar en tu cuaderno ángulos de 32°, 162°, 270° y 340°.
3. Utiliza un transportador para trazar en tu cuaderno un ángulo de cada tipo de los definidos en esta sección.

Ángulos por su posición

Ahora estudiaremos cómo se relacionan ciertos tipos de ángulos que están sobre una misma recta o en dos rectas paralelas.

Ángulos adyacentes o suplementarios (figura 1.6). Como su nombre lo indica son aquellos que están uno al lado del otro, pero no sólo eso, los lados no comunes tienen que estar alineados como se observa en la figura. De esta manera dos ángulos adyacentes forman juntos un ángulo llano, es decir, la suma de sus medidas es 180°, o en fórmula: $\alpha + \beta = 180°$.

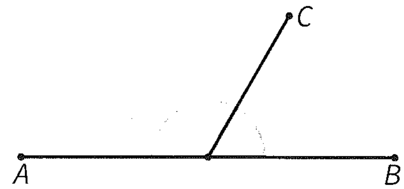


Figura 1.6

Cuando dos ángulos adyacentes son iguales, que cada uno mide 90°. A los segmentos que los forman se les llama **segmentos perpendiculares (figura 1.7)**. En la figura se tiene que α es igual a β y ambos miden 90°.

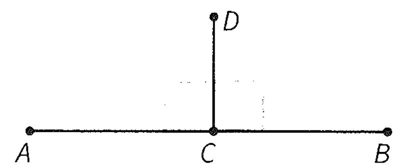


Figura 1.7

Ángulos complementarios (figura 1.8). Se les llama ángulos complementarios a dos ángulos que cumplen tres condiciones: tienen el mismo vértice, el lado final de uno es el lado inicial del otro y además suman 90°. En la figura se tiene que α más β es igual a 90°.

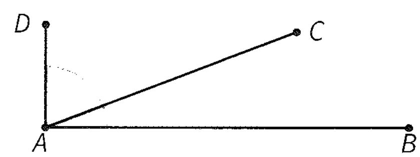


Figura 1.8

Ángulos opuestos por el vértice (figura 1.9). Cuando dos rectas distintas se intersecan se forman cuatro ángulos. Aquellos que quedan opuestos uno del otro se llaman opuestos por el vértice, este tipo de ángulos tienen la propiedad de que son iguales entre sí. En la figura se tiene que α es igual a γ y β es igual a δ ($\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$).

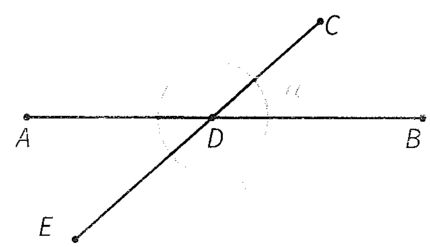


Figura 1.9

Ángulos entre rectas paralelas (figura 1.10). Dos rectas son paralelas si, por más que se prolonguen, nunca se cortan. Esta condición también se puede expresar en términos de ángulos como veremos a continuación.

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, se cumple lo siguiente:

- Los ángulos correspondientes son iguales, estos son:

  $$\alpha = \varepsilon, \beta = \zeta, \gamma = \eta \text{ y } \delta = \theta.$$

- Los ángulos alternos internos son iguales, estos son:

  $$\varepsilon = \gamma \text{ y } \delta = \zeta.$$

- Los ángulos alternos externos son iguales, estos son:

  $$\alpha = \eta \text{ y } \beta = \theta.$$

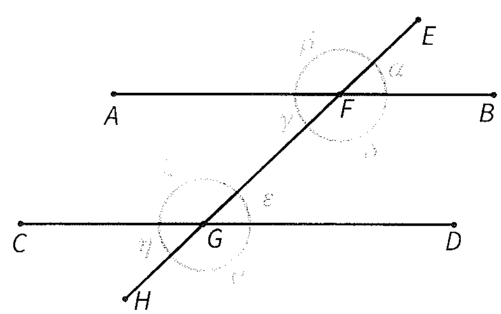
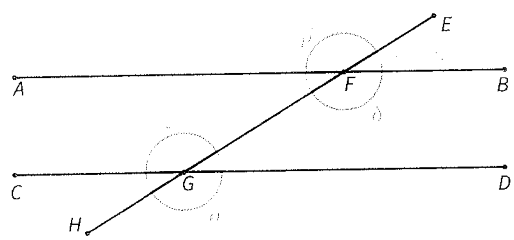


Figura 1.10

La recta que corta a las dos paralelas recibe varios nombres: secante, transversal, oblicua.

Además, observamos que α y β son adyacentes, por tanto, $\alpha+\beta=180°$. En resumen, en la figura todos los ángulos rojos miden lo mismo, todos los ángulos verdes miden lo mismo y la suma de un ángulo rojo más uno verde es de 180°. También es muy importante la propiedad recíproca a la anterior: si se tienen dos rectas cortadas por una transversal y se cumple alguna de las igualdades mencionadas, entonces, las rectas son paralelas.

Ejemplo

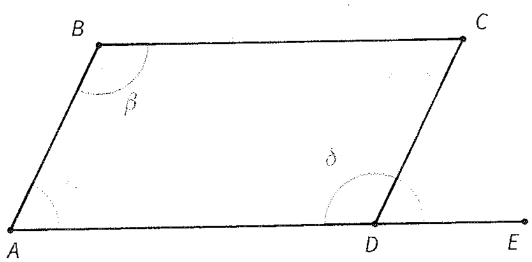


En la figura se muestran dos líneas paralelas cortadas por una transversal. Si el ángulo marcado mide 55°, ¿cuánto miden los demás?

Para este ejemplo hay que aplicar directamente lo visto en esta sección. El ángulo β es adyacente al de 55°, así que va a medir $\beta = 180° - 55° = 125°$, luego todos los demás ángulos *verdes*, δ, ζ y θ también van a medir 125°. Por otro lado, todos los ángulos *rojos*, γ, ε y η miden 55°.

Ahora vamos a ver un ejemplo de cómo la información de las paralelas nos da también información de los ángulos

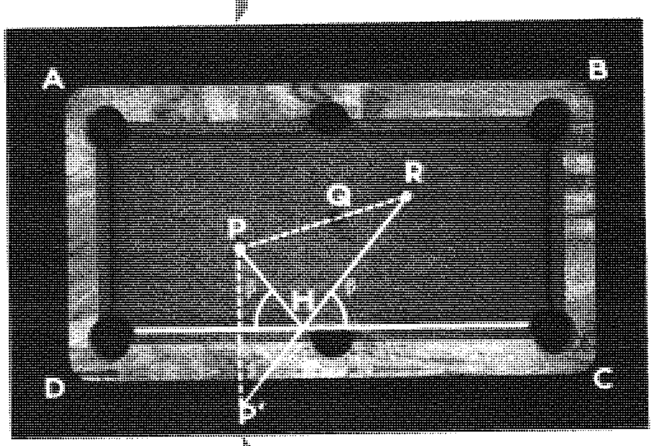
Ejemplo



Recuerda que un paralelogramo es un cuadrilátero con pares de lados opuestos paralelos. Demuestra que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Queremos demostrar que $\alpha=\gamma$, para esto vamos a usar ángulos entre paralelas dos veces.

Primero observamos que α y ε son ángulos correspondientes con respecto a las paralelas *AB* y *CD* cortadas por *AD*, por lo tanto, son iguales. De la misma manera, ahora nos fijamos en las paralelas horizontales *BC* y *AD* cortadas por *CD*; los ángulos γ y ε son alternos internos, así que tienen que ser iguales. Poniendo esto junto obtenemos que $\alpha=\varepsilon=\gamma$. De la misma manera se puede demostrar que los ángulos β y δ son iguales.



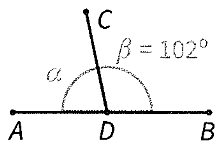
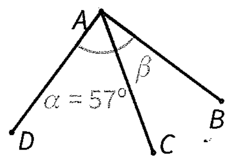
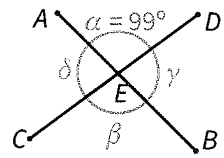
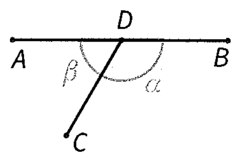
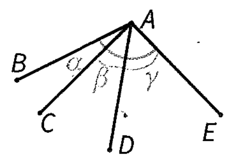
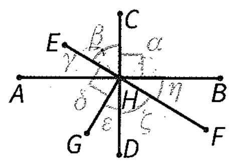
El ángulo a través de la historia

Euclides definió al ángulo como la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran en un plano sin estar en línea recta. Para Proclo, un ángulo debía ser una calidad o una cantidad, o una relación. El primer concepto fue adoptado por Eudemo de Rodas —quien concibió al ángulo como la desviación de una línea recta—, el segundo, por Carpo de Antioquía —quien lo consideró como el intervalo o el espacio entre las líneas que se intersecan—; Euclides formuló un tercer concepto, aunque sus definiciones de ángulos rectos, agudos y obtusos son cuantitativas.

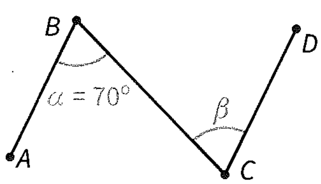
Actividad de aprendizaje 2

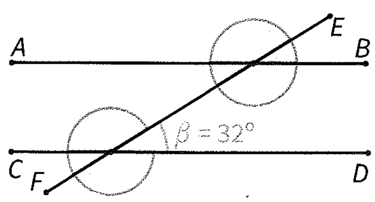
Con base en la información anterior, contesta lo que se pide.

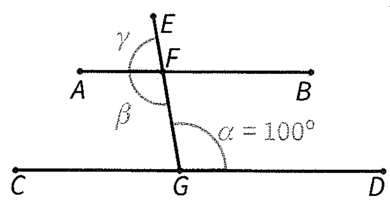
1. Halla el valor de los ángulos restantes, tomando en cuenta las condiciones dadas. El ángulo marcado con un cuadrado representa un ángulo recto.

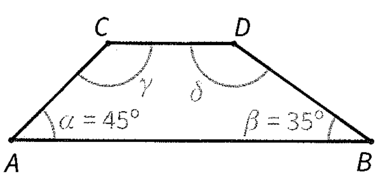
α y β son adyacentes. 	α y β son complementarios. 	α y β son opuestos por el vértice. 
α y β son suplementarios y $\alpha = 2\beta$ 	$\gamma = 2\beta = 3\alpha$ y son β y γ son complementarios 	AB y CD son segmentos perpendiculares y $\beta = 1/2\gamma$ 

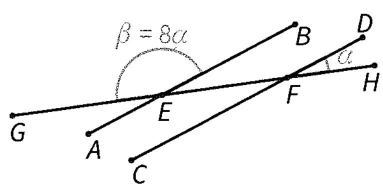
2. Halla los ángulos faltantes si sólo se sabe que los segmentos AB y CD pertenecen a líneas paralelas y los ángulos marcados con cuadrados miden 90°. Justifica con argumentos claros cada medida hallada.

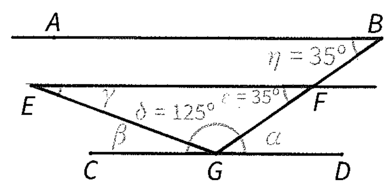


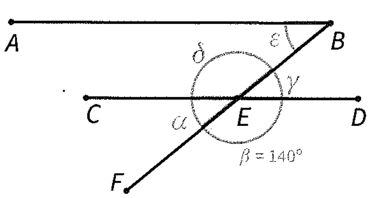


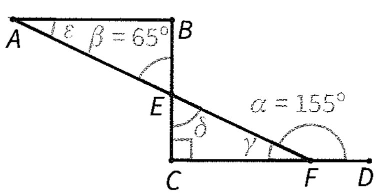


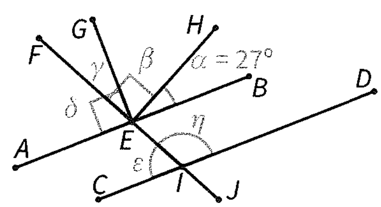


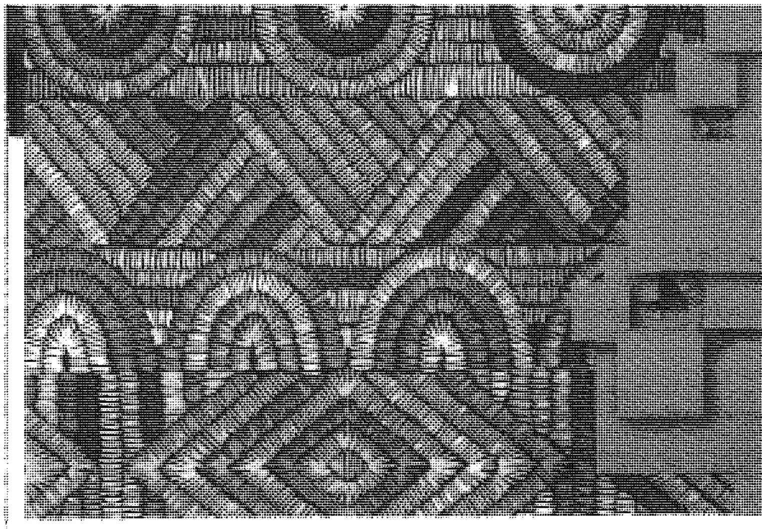












Sistemas angulares de medición

¿Cómo efectuar las conversiones de un sistema a otro?

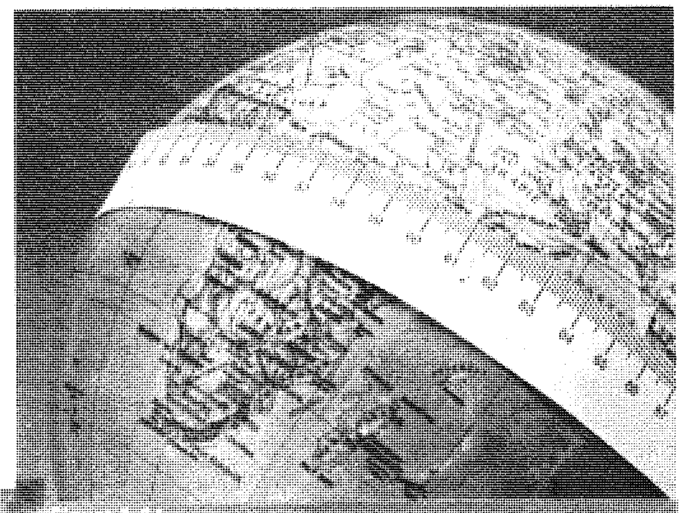


Figura 1.11

La circunferencia máxima de la Tierra tiene una longitud de 40 075 kilómetros aproximadamente, así que la porción de tierra abarcada en un grado, tiene una longitud de 111.319 kilómetros; un minuto abarca 1.855 kilómetros y un segundo, 30.92 metros.

A veces, por la necesidad de precisión, se usan fracciones de grados. Hay dos maneras de hacer esto, les llamamos sistema sexagesimal y sistema decimal.

En el **sistema sexagesimal** se usan minutos y segundos, siguiendo la analogía con el reloj. Esto es, 60 minutos equivalen a un grado y 60 segundos equivalen a un minuto.

Por ejemplo, el ángulo 35° 20' 30'' se lee 35 grados 20 minutos y 30 segundos.

En tu cuaderno es prácticamente imposible hacer la distinción entre dos ángulos que difieren en 1', es decir, ¿puedes partir un ángulo de 1° en 60 angulitos iguales? Sin embargo, a escalas más grandes, por ejemplo, al usar coordenadas para describir lugares en la Tierra o estrellas en el espacio, se vuelve crucial tener precisión hasta de segundos. ¡Imagínate partir un ángulo de 1° en 3 600 angulitos iguales! Uno de esos pedacitos sería un ángulo de 1''.

Otra forma de medir las fracciones de grados es usando el **sistema decimal**, de la misma manera que estamos acostumbrados a escribir números. Así, 74.2° representa 74 grados y 2 décimas de grado; 46.81° representa 46° y 81 centésimas de grado; 25.245° representa 25 grados y 245 milésimas de grado.

De sexagesimal a decimal

Ahora, ¿cómo convertimos de minutos y segundos a decimales? Como ya dijimos, 60 minutos es un grado, esto quiere decir que un minuto equivale a 1/60 grados.

De la misma manera, un segundo equivale a 1/60 minutos que a su vez equivale a 1/3 600 grados.

Entonces podemos transformar de minutos y segundos a decimales dividiendo entre 60 y 3 600 respectivamente. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Convierte 35° 20' 30" a sistema decimal.

Paso 1. Primero, los 35° quedan igual, sólo nos ocupamos de los minutos y segundos.

Paso 2. Los 20' se transforman a decimales dividiendo entre 60 y queda 0.3333 grados.

Paso 3. De manera similar los 30" se transforman a grados dividiendo entre 3 600 y queda 0.00833 grados.

Paso 4. Finalmente sumamos estos dos resultados obteniendo 0.341666 grados.

Por tanto, 35° 20' 30" equivale a 35.34166°.

Actividad de aprendizaje 3

Emplea lo aprendido para convertir los ángulos de grados, minutos y segundos a decimales. Menciona qué tipo de ángulo es cada uno, según su abertura.

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
45° 30'		
30° 12'		
45° 0' 30"		
20° 30' 30"		

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
36° 25' 30"		
107° 45' 50"		
200° 23' 20"		
320° 12' 12"		

De decimal a sexagesimal

De manera inversa, para pasar de decimales a minutos y segundos hay que multiplicar por 60 y por 3 600. Veamos con detalle cómo se hace esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Convierte 25.245° a sistema sexagesimal.

Paso 1. Nos fijamos sólo en los decimales, ya que los 25° van a quedar igual.

Paso 2. Ahora, los 0.245° los multiplicamos por 60, nos quedan 14.7, de esta cantidad sólo nos fijamos en la parte entera, es decir 14, que va a corresponder a los minutos que buscamos.

Paso 3. Lo que nos sobra, 0.7, lo volvemos a multiplicar por 60 y nos quedan 42, esto va a corresponder a los segundos que buscamos.

De esta manera, concluimos que 25.245° equivalen a 25° 14' 42".

Actividad de aprendizaje 4

Emplea lo aprendido para convertir los ángulos decimales a grados, minutos y segundos. Menciona qué tipo de ángulo es cada uno, según su abertura.

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
45° 30’		
30° 12’		
45° 0’ 30”		
20° 30’ 30”		

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
36° 25’ 30”		
107° 45’ 50”		
200° 23’ 20”		
320° 12’ 12”		

Resumen de la conversión de ángulos

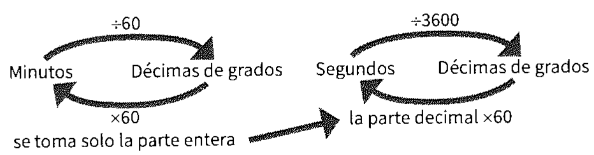


Figura 1.12

El esquema de la figura 1.12 explica los pasos que debes seguir para convertir ángulos decimales en ángulos sexagesimales y viceversa. Cuando quieras convertir de minutos y segundos a decimales deberás fijarte en la flechas que van de izquierda a derecha y cuando quieras ir del sistema decimal al sexagesimal, deberás fijarte en las flechas que van de derecha a izquierda.

Actividad de aprendizaje 5

Emplea lo aprendido para responder lo que se pide.

1. Responde las preguntas.
   - ¿A cuántos minutos equivalen 0.5°?
   - Si dividimos en cuatro parte iguales un ángulo que mide 1°, ¿cuánto mide cada ángulo?
   - ¿Cuántos segundos tiene un quinto de un minuto?
   - ¿A cuántos grados equivalen 20’ 20”?
2. Completa las tablas convirtiendo del sistema sexagesimal al decimal y viceversa. Menciona que tipo de ángulo es según su abertura.

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
12°		
	12.5°	
20° 15’ 0”		
90° 1’ 0”		
	269.9°	

Sexagesimal	Decimal	Clasificación
17° 24’ 9”		
33° 40’ 14”		
	96.5826°	
	21.8254°	
270° 45’ 12”		

Radianes

Ahora vamos a ver otra manera de medir ángulos. Podemos medir un ángulo de acuerdo a qué porción de una circunferencia cubre. Más precisamente, un ángulo lo medimos de acuerdo a la longitud del arco de circunferencia que abarca.

Sin embargo, tenemos que ponernos de acuerdo acerca del tamaño del círculo que vamos a usar. Para hacer la medida estándar usamos un círculo de radio 1, en este caso, su perímetro total es de 2π y, por lo tanto, decimos que un ángulo completo que da toda la vuelta mide 2π radianes.

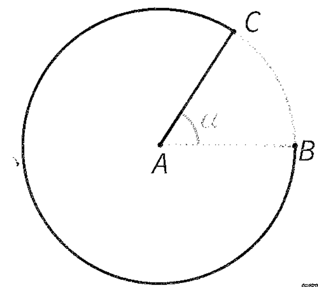


Figura 1.13

¿Quién es π?

Es una letra del alfabeto griego (se lee pi) y en geometría se usa para denotar una constante importante: los griegos notaron que al medir el perímetro de un círculo y compararlo con su diámetro siempre encontraban la misma proporción. A esta constante de proporcionalidad le llamaron π, es decir, π se define como:

$$\pi = \text{perímetro de una circunferencia} \div \text{diámetro}$$

El valor de π es aproximadamente 3.14159...

De esta manera, un ángulo que cubre sólo la mitad de la circunferencia mide π radianes. Un ángulo que cubre la cuarta parte de la circunferencia mide $\pi/2$ radianes, y así sucesivamente.

De sexagesimal a radianes y viceversa

De lo visto anteriormente podemos notar que un ángulo completo de 360° equivale a 2π radianes. Mientras que un ángulo llano de 180° corresponde a π radianes.

En general, para transformar de grados a radianes o viceversa basta usar una regla de tres considerando que 180° equivale a π radianes. De manera esquemática lo podemos resumir como se muestra en la figura 1.14.

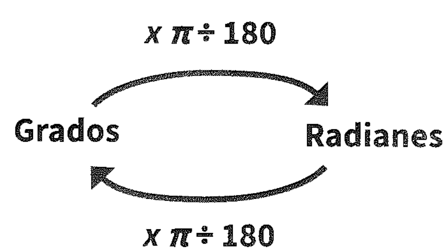


Figura 1.14

Ejemplos

1. Un ángulo de 90° corresponde a $\pi/2$.
2. Un ángulo de 30° corresponde a $30° \times \pi/180 = \pi/6$ radianes.
3. Un ángulo de $\pi/4$ radianes corresponde a $\pi/4 \times 180°/\pi = 45°$.

Actividad

Lleva a cabo lo que se pide.

1. Transforma los ángulos de grados a radianes:

   a. $1°$ b. $5°$ c. $15°$ d. $20°$ e. $80°$ f. $210°$ g. $270°$

2. Transforma los ángulos de radianes a grados:

   a. $\frac{\pi}{15}$ b. $\frac{\pi}{18}$ c. $\frac{2\pi}{3}$ d. $\frac{\pi}{9}$ e. $\frac{2\pi}{4}$ f. $\frac{\pi}{2}$ g. $\frac{2\pi}{5}$

3. Calcula el valor aproximado en grados, minutos y segundos de un radián.

Para medir ángulos sobre la Tierra y saber tu posición con precisión se requiere un esfuerzo enorme de ingeniería. Actualmente, se ubican puntos sobre la Tierra gracias al sistema satelital y a un método trigonométrico de triangulación en el que la Física también forma parte, ya que se necesita saber la velocidad a la que viaja una señal satelital.

¿Por qué existen varias formas de medir ángulos?

En la práctica, al medir grados usando un transportador, o instrumentos más precisos, naturalmente se usa el sistema sexagesimal de grados, minutos y segundos. Sin embargo, los radianes son mejores al usar ángulos para calcular distancias.

Aquí veremos algunos ejemplos del tipo de problemas que aparecen en diferentes contextos y qué sistema de medición angular conviene usar en cada caso.

Ejemplo

Sistema de coordenadas en la Tierra

En general, un ángulo de α radianes abre un arco de longitud $\alpha \times r$ sobre una circunferencia de radio r.

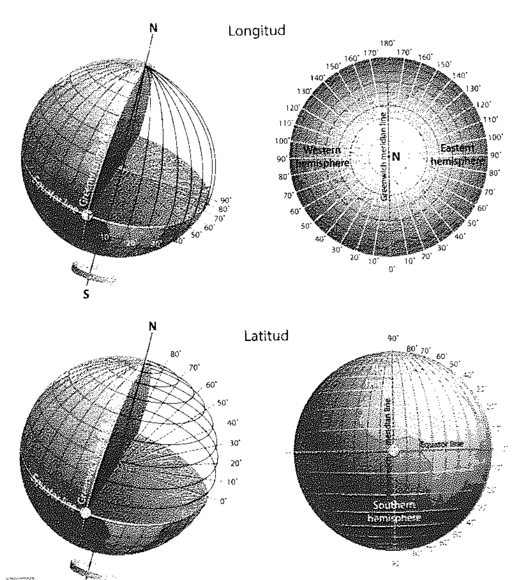


Imagen 1.15

Como sabes, la Tierra es esférica, por esta razón, la manera en que ubicamos puntos y lugares sobre ella es usando grados. Históricamente se han tomado dos líneas como punto de partida: el meridiano de Greenwich y el ecuador.

Los meridianos son líneas que unen el polo norte con el polo sur y se identifican de acuerdo con el ángulo de apertura que forman con el meridiano de Greenwich. Por otro lado, los paralelos son líneas paralelas al ecuador y también se identifican de acuerdo a su distancia (en grados) al mismo. De esta manera, podemos describir la posición de un punto sobre la Tierra indicando a qué meridiano y paralelo pertenece.

Ejemplos

El parlamento inglés ubicado en el centro de Londres tiene coordenadas 51° 30' 37'' N y 0° 07' 0'' W, esto significa que se encuentra a 51° 30' 37'' al Norte del Ecuador y a 0° 07' 0'' al Oeste (West en inglés) del Meridiano de Greenwich.

1. El zócalo de la Ciudad de México está en 19° 25' 58'' N y 99° 08' 00'' W.
2. Las coordenadas del centro de Quito son 0° 13' 31'' S y 78° 31' 29'' W.
3. Toronto está en 43° 37' 44'' N y 79° 24' 47'' W.

Como ves, los ángulos en grados, minutos y segundos son esenciales para describir con precisión un punto sobre la Tierra. ¿Pero qué tal distancias? Para esto nos ayudan los radianes. Y de hecho, para hacer la conversión de grados a radianes necesitamos al sistema decimal como intermediario.

A modo de ejemplo calculemos la distancia entre Quito y Toronto. Primero notamos que están casi sobre el mismo meridiano, 79° W, pero en diferentes paralelos. Entonces, la apertura angular de Quito a Toronto es de aproximadamente 43° 37' 44'' + 0° 13' 31'', la suma se debe a que Toronto está en un paralelo Norte, mientras que Quito está en un paralelo Sur.

Hay que hacer esta suma con cuidado, empezamos con los segundos 44'' + 31'' = 75''. Pero como 60'' equivalen a 1' entonces escribimos 75'' = 1' 15''. Ahora los minutos, 37' + 13' = 50', a este resultado le vamos a sumar el 1' que se acumuló en los segundos. Entonces queda:

$$43° \, 37' \, 44'' + 0° \, 13' \, 31'' = 43° \, 51' \, 15''.$$

Ahora necesitamos transformar este ángulo en distancia sobre la Tierra. Para esto primero convertimos esta medida al sistema decimal.

Primero 51' equivale a 51/60 = 0.85°. Luego 15'' = 15/3600 = 0.00416°. Entonces:

$$43° \, 51' \, 15'' = 43.8541°.$$

Después convertimos a radianes usando $\pi = 3.1416$, nos queda que el ángulo en radianes es de $43.8541° \times 3.1416 \div 180° = 0.7654$ radianes.

Finalmente calculamos la distancia sobre la Tierra, ya que los radianes están adaptados naturalmente a longitud de arco; sólo tenemos que considerar el factor de escala al medir longitudes sobre la Tierra. Recuerda que los radianes los medimos de acuerdo a un círculo de radio 1, pero ahora estamos considerando un círculo de radio 6 371 km (el radio de la Tierra).

Por lo tanto, la distancia de Quito a Toronto es de aproximadamente $0.7654 \times 6\,371 = 4\,876.3634$ km.

TIC

Juega con google maps para ver coordenadas de otros lugares y también medir distancias.

Para saber más

¿Cómo le harías para calcular la distancia entre dos ciudades que están en el mismo paralelo pero diferente meridiano? Para esto necesitamos de las funciones trigonométricas seno y coseno que veremos más adelante.

Actividad de aprendizaje 7

Haz equipo con un compañero y haciendo un razonamiento similar al del ejemplo anterior respondan lo siguiente.

1. Ahora te toca calcular la distancia aproximada entre Quito y Miami, estas dos ciudades también se encuentran (casi) sobre el mismo meridiano. Las coordenadas de Miami son 25° 43' 52'' N y 80° 15' 43'' W.

Te debería quedar 2 813 km aproximadamente.

¿Cuáles son las razones por las cuales se hacen conversiones?

Ya vimos cómo los ángulos te pueden ayudar a calcular distancias sobre la Tierra.

En Astronomía también se usan ángulos para medir distancias. Veamos cómo calcular aproximadamente el diámetro de la Luna.

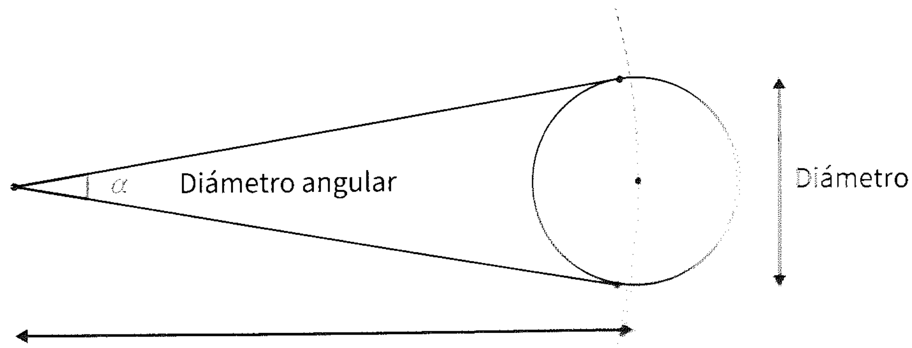
Glosario

Diámetro angular. Es el ángulo de abertura de un objeto circular que mide un observador a distancia.

La distancia de la Tierra a la Luna es de 406 300 km. Imaginemos una circunferencia con este radio y centro en la Tierra, entonces esta circunferencia va a pasar por el centro de la Luna. Además, la luna va a cubrir sólo una pequeña parte de esa circunferencia y la porción que cubre va a corresponder a una buena aproximación del diámetro de la Luna, si es una buena aproximación. De acuerdo a esto podemos calcular el diámetro de la Luna si conocemos el **diámetro angular** de la Luna vista desde la Tierra.

Ahora calculemos el diámetro de la Luna con un procedimiento similar al que usamos para calcular distancias sobre la Tierra. Esto es, basta multiplicar el diámetro angular de la Luna (en radianes) por el radio de la circunferencia en cuestión, que en este caso es una circunferencia de radio 406 300 km.

Hay variaciones de distancia y de diámetro angular de la Luna a lo largo del año. En este ejemplo se tuvo cuidado de usar los valores del apogeo, es decir, de cuando la Luna se encuentra más alejada de la Tierra.



Al ver a la Luna llena se puede medir su diámetro angular, este ángulo es de aproximadamente 0° 29' 23'' (aunque varía a lo largo del año). Este dato junto con la distancia de la Tierra a la Luna nos ayuda a calcular el diámetro de la Luna.

Necesitamos convertir los 0° 29' 23'' a radianes, para esto convertimos primero a decimales. Nos queda que 29' = 29/60 = 0.4833° y 29'' = 29/3600 = 0.0063° entonces, 0° 29' 23'' equivale a 0.4896°.

Luego, 0.4896° equivale a $0.4896° \times 3.1416 \div 180° = 0.008545$ radianes.

Así, concluimos que el diámetro de la Luna es aproximadamente:

$$0.008546 \times 406\,300 = 3\,472.23 \text{ km}.$$

El diámetro de la Luna de acuerdo a Wikipedia es de 3 474 km. Así que nuestra aproximación fue buena.

Para saber más

Medir distancias astronómicas es muy difícil, ya que no podemos hacerlo directamente, así que tenemos que depender de otro tipo de técnicas.

Los ángulos y la Trigonometría juegan un papel muy importante en las técnicas para medir distancias, en particular para una llamada Paralaje.

Actividad de aprendizaje 8

Haciendo un razonamiento similar al del ejemplo anterior responde lo siguiente.

1. Aproxima el diámetro del Sol. Considera un ángulo de abertura visto desde la Tierra de 31' 31'' y una distancia de la Tierra al Sol de 152 100 000 km.

Compara con el valor que aparece en Wikipedia: diámetro del Sol 1 392 000 km.

Actividad de aprendizaje 9

Productos esperados

Copia en una hoja aparte la tabla y complétala. Guarda tu trabajo como evidencia de tu aprendizaje.

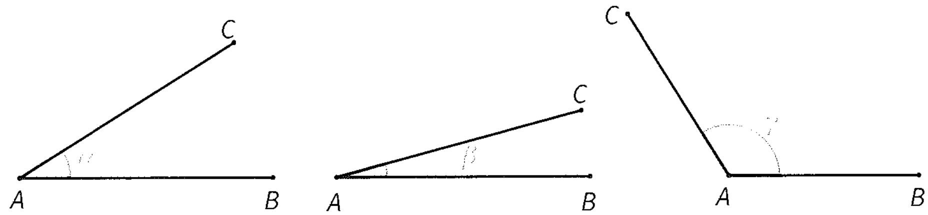
Sistema sexagesimal	Sistema decimal	Radianes
10° 21' 0''		
64° 14' 55''		
	0.1333°	
	54.9736°	
		1.5708
		0.5236
23° 1' 1''		
	57.32°	

Actividad de aprendizaje 10

Productos esperados

Lleva a cabo la siguiente actividad utilizando hojas sueltas. Guarda tu trabajo como evidencia de tu aprendizaje.

1. Copia en una hoja los ángulos y mídelos con ayuda de un transportador.

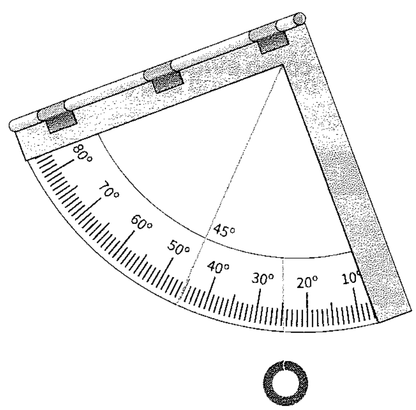


2. Usando tu transportador traza ángulos que midan 23°, 56° y 101°.
3. Ahora, construye un triángulo cuyos ángulos midan 23°, 56° y 101°.

Actividad de aprendizaje 11

Productos esperados

Lleva a cabo la siguiente actividad utilizando hojas sueltas. Guarda tu trabajo como evidencia de tu aprendizaje.

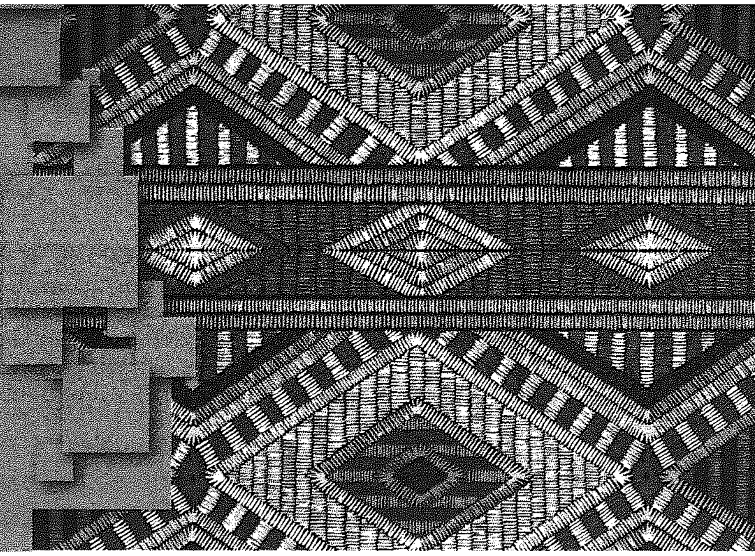


1. Construye un cuadrante, también conocido como astrolabio, como el que se ve en la figura. Te servirá para medir ángulos de elevación, ya sea de estrellas, de edificios, etcétera.

Materiales:

- Cuadrado de cartón de 15 cm × 15 cm, con marcas de ángulos como los que se ven en la figura.
- Popote o tubito reciclado a forma de "telescopio".
- Hilo, 20 cm aproximadamente.
- Objeto pesado (20 g aproximadamente) que se pueda amarrar al hilo.
- Transportador.

2. Usa tu astrolabio para medir el ángulo de elevación de diferentes objetos: edificios, árboles, estrellas, etcétera. Se necesitan dos personas, la primera sostiene el astrolabio mientras apunta al objeto que desea medir, la segunda observa y escribe el ángulo que marca el hilo del astrolabio.
3. Anoten sus cálculos para generar una evidencia.



Propiedades de los triángulos según sus lados y ángulos

¿Qué los identifica entre sí?

Al hacer dibujos podemos formar distintas figuras. A las que se forman uniendo puntos con líneas rectas les llamamos polígonos. Ahora estudiaremos las propiedades del polígono más simple: el triángulo.

Como su nombre lo dice, el triángulo es una figura con tres ángulos, por lo mismo, cuenta con tres vértices y tres lados (figura 1.16).

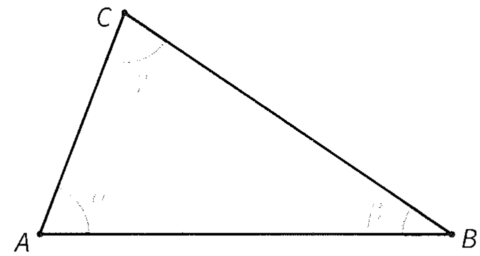


Figura 1.16

El triángulo es una figura que aparece frecuentemente en la ingeniería, por tratarse de la figura más simple, también es la más rígida y estable ya que distribuye el peso de manera directa hacia abajo a través de dos de sus lados, por ejemplo, aparece en las estructuras de puentes. También es de utilidad teórica y práctica al momento de medir terrenos, medir ángulos para la navegación, en el cálculo de distancias, etcétera. En este libro aprenderás propiedades acerca de su perímetro, área, ángulos y muchas otras particularidades de ellos.

¿Qué los diferencia entre sí?

Clasificación por la abertura de sus ángulos

Empecemos por familiarizarnos con los triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos. Una clasificación de los triángulos es con base en su ángulo más grande, si éste mide menos, igual o más de 90°:

- Acutángulo. todos sus ángulos internos miden menos de 90°.
- Rectángulo. uno de sus ángulos internos mide 90°.
- Obtusángulo. uno de sus ángulos internos mide más de 90°.

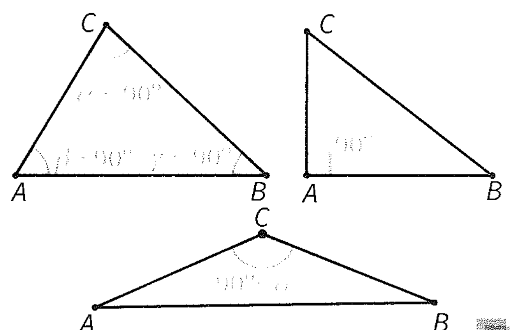


Figura 1.17

Clasificación por la medida de sus lados

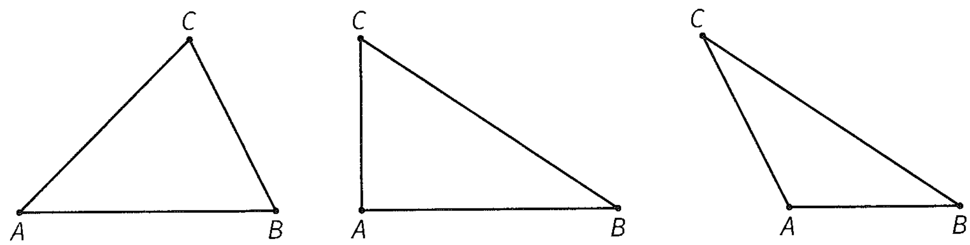
Por otro lado, también los podemos clasificar de acuerdo a la medida de sus lados. Más adelante aprenderás cómo se traslapan las clasificaciones de acuerdo a lados y a ángulos.

- **Escaleno.** Sus tres lados son diferentes.
- **Isósceles.** Tiene dos lados iguales y uno diferente.
- **Equilátero.** Tiene sus tres lados iguales.

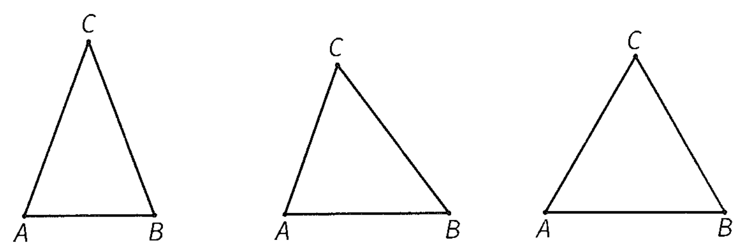
Actividad de aprendizaje 12

Con lo aprendido anteriormente responde lo siguiente.

1. De acuerdo a la medida de sus ángulos, ¿de qué tipo es cada triángulo?



2. De acuerdo a la medida de sus lados, ¿de qué tipo es cada triángulo?



3. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de cada tipo: acutángulo, rectángulo y obtusángulo.
4. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de cada tipo: equilátero, isósceles y escaleno.

Actividad de aprendizaje 13

Usa tu transportador para corroborar que un triángulo isósceles tiene dos ángulos que miden lo mismo.

1. Dibuja un triángulo equilátero. Un compás puede resultar de mucha ayuda.
2. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? ¿Es una medida fija o cambia de acuerdo al tamaño del triángulo?

Puntos y rectas notables del triángulo

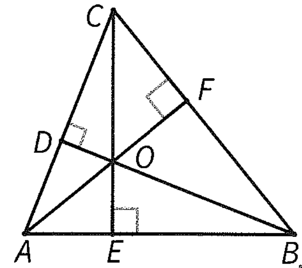


Figura 1.18

En cuanto más nos adentramos a estudiar a los triángulos aparecen más puntos y rectas que nos ayudan a entender sus propiedades. En esta sección veremos las siguientes rectas notables: alturas, bisectrices, mediatrices y medianas. Ellas aparecen cuando consideramos propiedades geométricas como áreas, distancias o construcciones especiales dentro y fuera de los triángulos.

Alturas (figura 1.18). Son las rectas perpendiculares que van de un vértice al lado opuesto. Como probablemente ya sabes, la altura de un triángulo es esencial para calcular su área. Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto llamado ortocentro del triángulo.

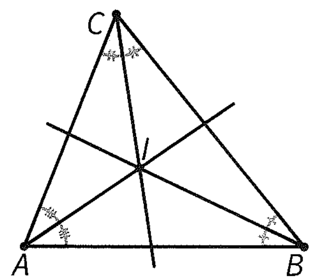


Figura 1.19

Bisectrices (figura 1.19). Son las rectas que parten a la mitad un ángulo. Las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto llamado incentro del triángulo, este punto tiene la propiedad de ser el centro del círculo que es tangente a los tres lados del triángulo.

Mediatrices (figura 1.20). Son las rectas perpendiculares a un lado por el punto medio. Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro del triángulo, este punto tiene la propiedad de ser el centro del círculo que pasa por los tres vértices del triángulo.

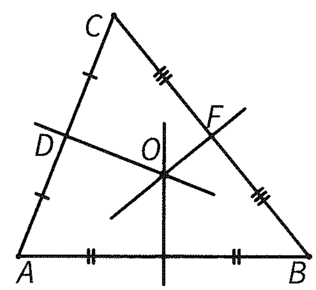


Figura 1.20

Medianas (figura 1.21). Son las rectas que van de un vértice al punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamado gravicentro o centro de gravedad, este punto tiene la propiedad de que las tres medianas que pasan por él dividen al triángulo en seis triangulitos de áreas iguales.

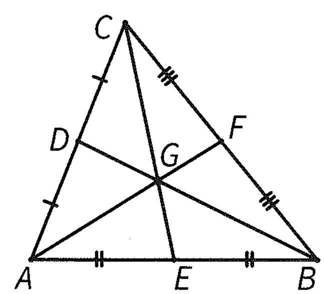
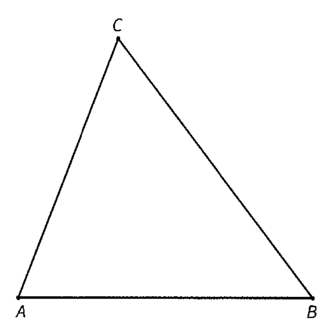


Figura 1.21

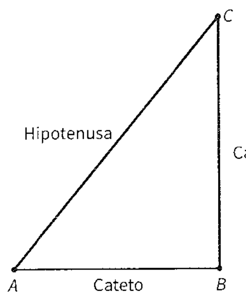
Actividad de aprendizaje 14

En esta actividad te toca verificar las propiedades enunciadas de cada recta y punto notables del triángulo. Realiza cuatro copias del triángulo que se muestra y lleva a cabo lo que se pide.

1. Mide con tu regla la base y la altura del triángulo de la figura para obtener su área.
2. Con tu transportador mide los ángulos del triángulo y divídelos a la mitad, es decir, traza las bisectrices. Éstas se cortan en un punto que llamaremos I. Con tu compás traza el círculo con centro en I, que es tangente a los tres lados del triángulo.
3. Con tu regla o tu compás traza las mediatrices de los lados del triángulo. Estas rectas se cortan en un punto que llamaremos O. Con tu compás traza el círculo con centro en O, que pasa por los vértices del triángulo.



4. Marca los puntos medios de los lados del triángulo y traza las medianas, estas rectas se cortan en un punto que llamaremos G. Verifica que los seis triángulos en que las medianas dividen al triángulo ABC tienen la misma área.



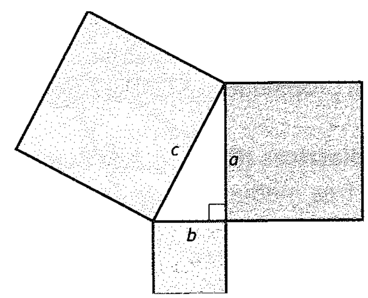
Ahora veremos cierta clase de triángulos especiales, aquellos que tienen un ángulo de 90°.

La importancia de estos triángulos radica en que las configuraciones de ángulos de 90° aparecen en repetidas ocasiones en problemas en los que se necesita medir distancias. De hecho, de los triángulos rectángulos se desprenden la trigonometría y la geometría analítica. Pero antes de pasar a eso, primero aprenderemos el famoso teorema de Pitágoras que nos va a ayudar a medir “diagonales”.

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}.$$

Geométricamente este teorema se puede interpretar de la siguiente manera: si construimos un cuadrado sobre cada lado del triángulo rectángulo, entonces, la suma de las áreas de los dos cuadrados chicos es igual al área del cuadrado más grande.



Actividad

Responde lo que se pide.

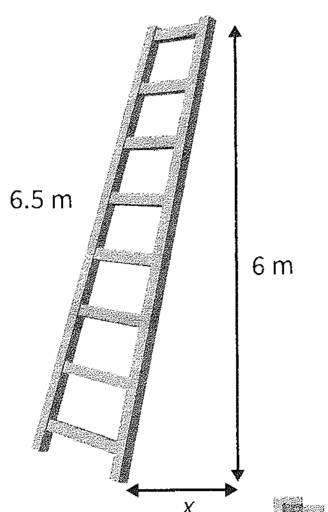
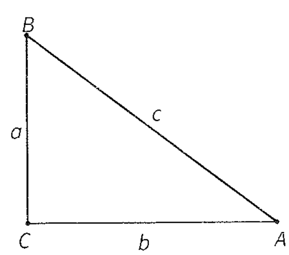
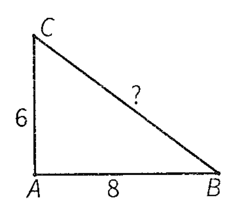
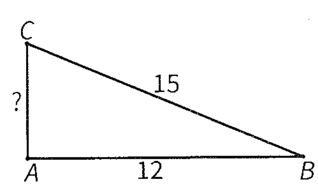


Figura 1.22







1. En la figura identifica los catetos del triángulo rectángulo y la hipotenusa. Con ayuda de una regla calcula lo siguiente.
   - Indica cuánto vale $a^2 + b^2$: ______
   - Indica cuánto vale c^2: ______
   - ¿Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$?
   - ¿Puedes trazar un triángulo con las mismas medidas de lados que no sea rectángulo?
2. En las figuras calcula la medida del lado que falta.

   En la figura mide los ángulos, ¿cuánto es la suma de los ángulos de cada triángulo?
3. Juan tiene una escalera de 6.5 metros de alto y quiere subir a la ventana del segundo piso de su casa que se encuentra a 6 metros de altura (figura 1.22). ¿A qué distancia de la pared va a quedar la base de la escalera?

¿Por qué los triángulos son estructuras rígidas usadas en las construcciones?

Construir un edificio alto es difícil, entre más alto sea el edificio se necesitará mucha más fuerza y estabilidad de todos los componentes. Sobre todo los de abajo que van a soportar todo el peso.

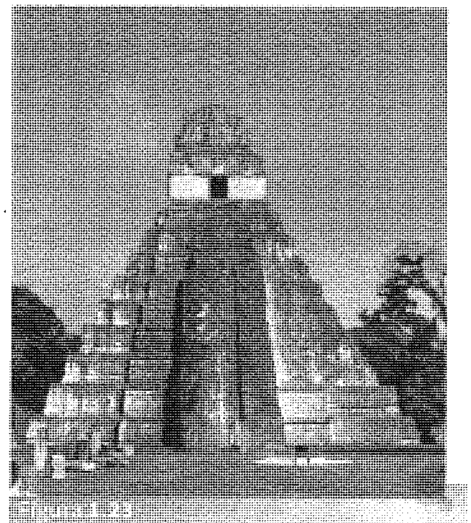


Figura 1.23

Templo del gran Jaguar, Tikal.

Las culturas de la antigüedad recurrieron a las figuras geométricas conocidas como pirámides. Éstas tienen la ventaja de tener bases muy amplias que proveen un buen soporte. Además, debido a su terminación en punta, se evita el aumento de peso y se gana estabilidad.

Otro ejemplo de triángulos en las construcciones son los llamados “techos a dos aguas”, que son con forma de triángulo isósceles que ayudan a que el peso del techo se reparta hacia los lados y descanse sobre las paredes. De esta manera, se pueden lograr espacios amplios, ya que la parte central del techo no requiere soporte.

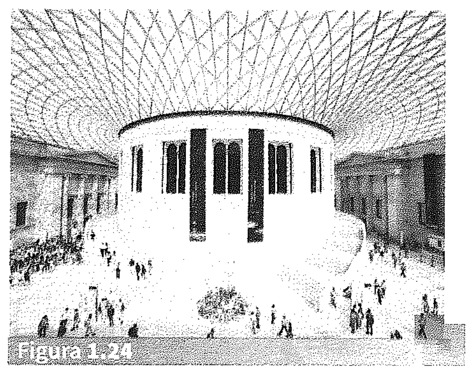


Figura 1.24

Museo Británico, Londres, Inglaterra

Últimamente también han cobrado popularidad los llamados techos geodésicos. La idea es lograr techos que aparentan ser curvos y de formas caprichosas, pero que en realidad son estructuras rígidas que se forman al acomodar muchos triángulos de manera muy particular y por supuesto, planeada de antemano. El impacto visual que causan habla por ellos.

Pero, ¿son los triángulos la mejor opción para techos amplios? O dicho de otra manera, ¿qué forma debe tener un techo para lograr la mejor estabilidad y repartir el peso de manera óptima hacia los lados?

El triángulo isósceles puede ser la primera opción que viene a la mente, y por su sencillez es uno de los diseños más usados. Sin embargo, la forma óptima es una curva conocida como catenaria. En la figura 1.25 se observa una estación de tren cuyo techo tiene forma catenaria. Curiosamente, la catenaria se descubrió originalmente como la curva que forma una cadena suspendida en sus dos extremos. La relación con la construcción de arcos y techos amplios se le atribuye al inglés Robert Hook quien la describió como:

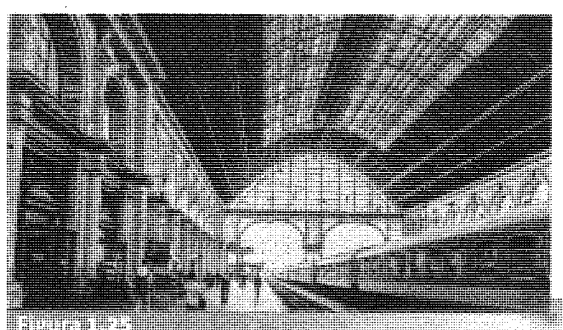


Figura 1.25

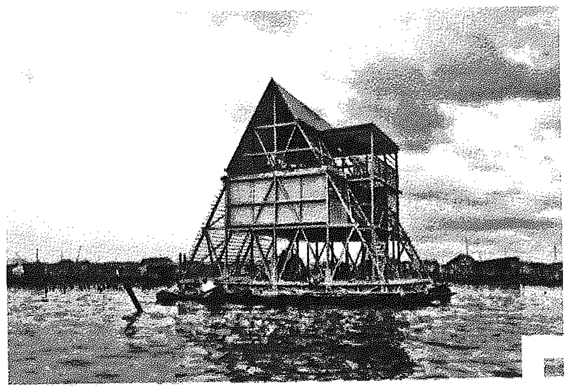
Estación de tren Keleti en Budapest, Hungría. Su techo tiene forma de catenaria.

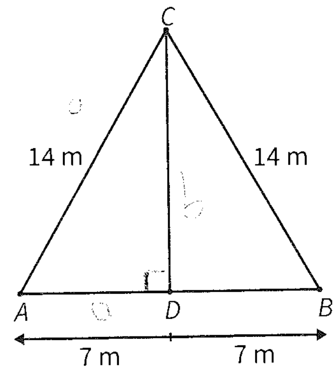
“Tal como cuelga un cable flexible así, invertido, se erigen piezas de un arco”.

Actividad de aprendizaje 16

Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. En la figura se muestra una escuela flotante de la región de Lagos, Nigeria. Si el frente es un triángulo equilátero de 14 m de lado, ¿cuál es su altura?





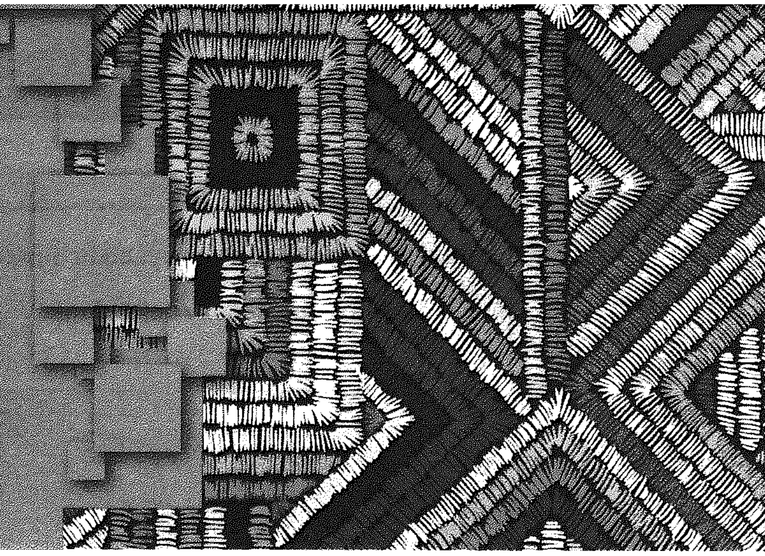
2. De camino a casa, o cuando salgas a pasear con tu familia o amigos, observa tu entorno y ubica alguna construcción triangular. Utiliza el astrolabio que construiste en la actividad 11 para calcular su altura. Anota tu procedimiento y entrega un reporte a tu profesor.

Actividad de aprendizaje 17

Productos esperados

La siguiente actividad deberás desarrollarla en hojas independientes, pues forma parte de tu portafolio de evidencias de aprendizaje.

1. Lee la siguiente situación y desarrolla cada inciso.
   En este ejercicio vas a imaginar que eres un diseñador y un cliente te pide el diseño de un techo a dos aguas con forma de triángulo isósceles. Para esto necesitarás hacer un dibujo a escala de manera que 1 cm corresponda a 1 m. Además, el cliente es muy exigente y te pide tres diseños para decidir cuál se verá mejor. Así que saca regla, compás y transportador.
   a. Para el primer diseño te pide un techo con forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales midan 4 m y el ángulo entre ellos sea de 120°.
   b. Para el segundo diseño te pide un techo con forma de triángulo isósceles cuya base mida 7 m y los ángulos adyacentes a la base midan 20° cada uno.
   c. Para el tercer diseño te pide un techo con forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales midan 4 m y la base mida 7 m.
   d. Para cada diseño, ¿son suficientes los datos?
   e. Como diseñador, ¿te queda alguna libertad para elegir la forma final del triángulo?
2. Genera un reporte de tu actividad, en el que incluyas tus conclusiones.



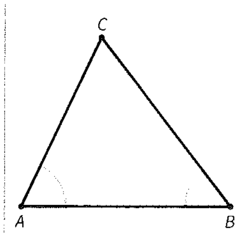
Característica de las sumas de ángulos internos en triángulos y polígonos regulares

¿Por qué la configuración y la reconfiguración espacial de figuras sirve para tratar con situaciones contextuales de la geometría?

Ahora veremos una propiedad bastante interesante acerca de los triángulos. Como ya sabemos, un triángulo cuenta con tres ángulos, lo curioso es que sus medidas no pueden ser cualquier cosa, ya que éstas se encuentran relacionadas de la siguiente manera:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

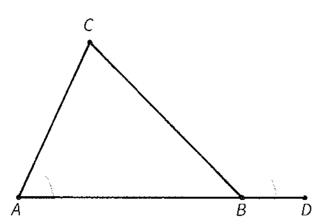


De lo anterior, deducimos que si sabemos dos ángulos de un triángulo, entonces, el tercero queda determinado. Por ejemplo, si sabemos que los ángulos α y β miden 23° y 56°, respectivamente, entonces el tercer ángulo, γ, debe medir $180° - 23° - 56° = 101°$, ya que los tres deben sumar 180°.

A veces, dependiendo del contexto, también nos conviene poner atención en los ángulos externos de un triángulo. Un ángulo externo de un triángulo es un ángulo adyacente a un ángulo interno. Como consecuencia del resultado anterior, también tenemos que:

Un ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él

$$\alpha + \gamma = \delta.$$

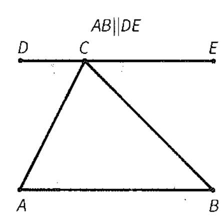


En un triángulo, sus ángulos externos miden x, 2x y 3x, ¿qué tipo de triángulo es?

a. Escaleno
b. No existe
c. Isósceles
d. Equilátero

Ejercicio extra

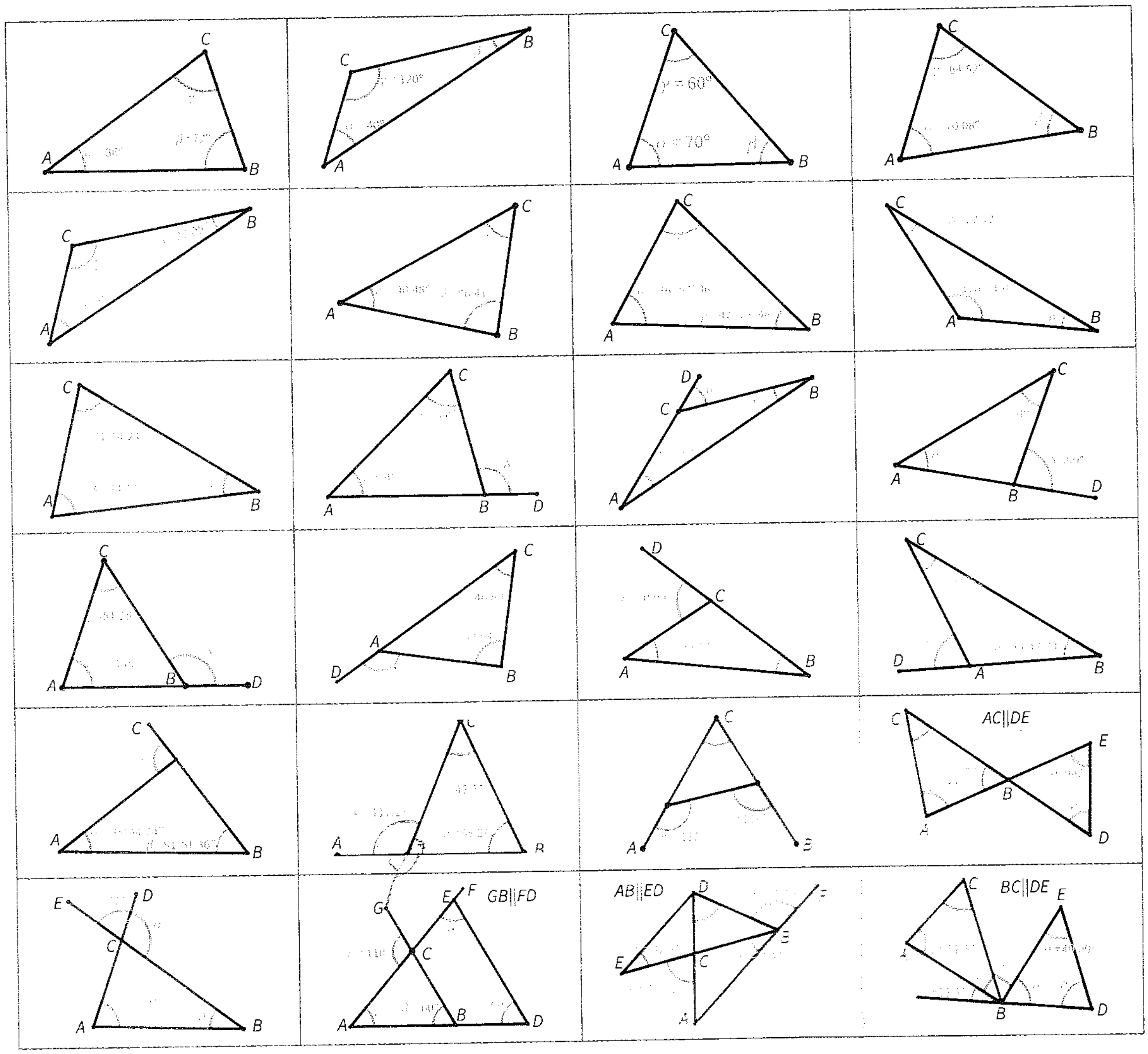
Utiliza la figura, y las dos propiedades de este tema, para probar que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.



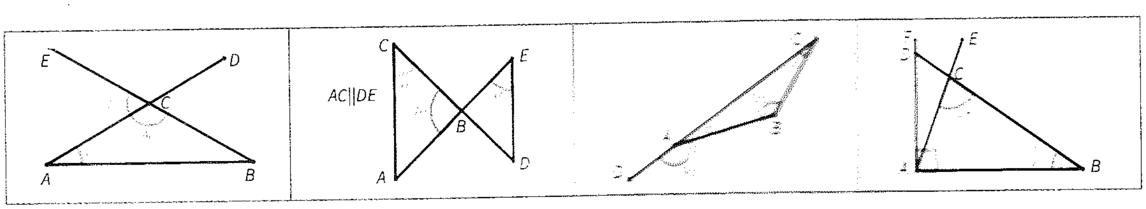
Actividad de aprendizaje 18

Con base en lo aprendido, lleva a cabo lo que se pide.

1. Aplica las dos propiedades y definiciones vistas anteriormente para hallar las medidas de los ángulos señalados.



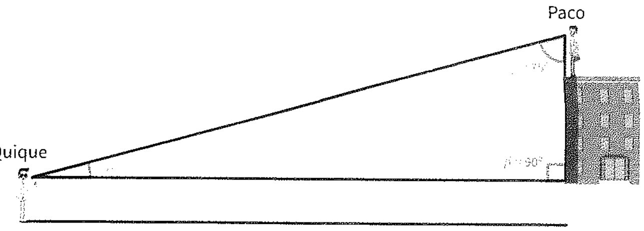
2. Halla el valor de α.



3. En la Actividad de aprendizaje 17 elaboraste tres diseños. Usando lo aprendido en esta sección, ¿cuánto miden los ángulos de los triángulos de los primeros dos diseños?

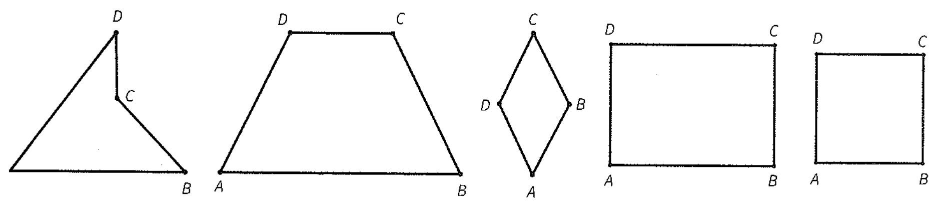
4. Lee la situación planteada y responde lo que se pide.

Paco y Quique van a hacer la siguiente medición. Paco se sube a la azotea de un edificio, mientras que Quique se sitúa lejos del edificio a nivel del suelo. Paco observa a Quique y mide el ángulo de declive de su línea de visión con respecto a la vertical, obteniendo un resultado de 75°. Quique hace lo propio y mide el ángulo de elevación con respecto a la horizontal al observar a Paco. ¿Qué resultado debería obtener Quique?



Definición de polígono regular

Ahora estudiaremos polígonos con más lados. Empecemos con los de cuatro lados, en la figura se muestran ejemplos de cuadriláteros, ¿reconoces alguno?



Una figura con cinco lados se llama **pentágono (figura 1.26)**; una figura de seis lados, **hexágono (1.27)** y así sucesivamente. Toda esta familia de figuras delimitadas por lados rectos son los llamados **Polígonos** ("muchos ángulos" en griego).

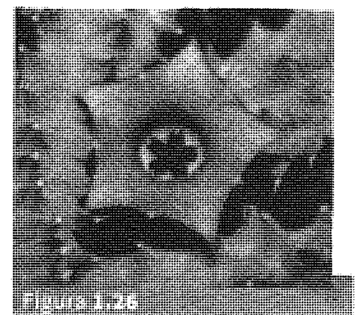


Figura 1.26

Flor pentagonal de una huernia.

En general, los polígonos son figuras muy variadas y podemos decir poco acerca de sus propiedades geométricas. Entre lo poco que sí podemos decir se encuentra un enunciado acerca de la suma de los ángulos interiores. Como ya vimos, en cualquier triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°. De la misma manera, podemos encontrar la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono dependiendo del número de lados. En la siguiente actividad empezaremos a explorar esta relación.

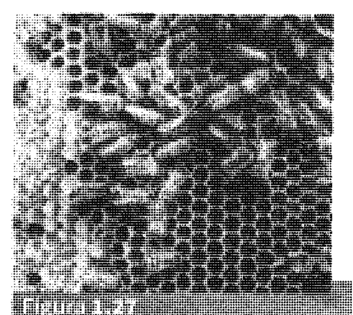


Figura 1.27

Los panales de las abejas están formados de hexágonos.

Actividad de aprendizaje 19

Resuelve los ejercicios.

1. Calcula la suma de los ángulos interiores de cada uno de los cuadriláteros de la figura anterior. ¿Puedes concluir una regla general?

2. Completa el enunciado:

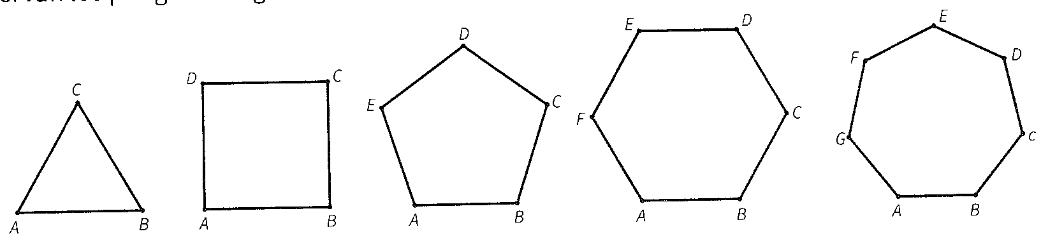
   "La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es ____°".

3. Dibuja un pentágono cualquiera y mide sus ángulos. ¿Cuánto suman sus cinco ángulos? Completa el enunciado:

   "La suma de los ángulos interiores de un pentágono es ____°".

Un polígono puede tomar cualquier forma siempre y cuando todos sus lados sean rectos. Sin embargo, hay unos polígonos que son más "bonitos" que el resto, en el sentido de que son más regulares.

Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales. En la figura se observan los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 7 lados.



Al momento de dibujar un polígono regular naturalmente surgen varias preguntas, por ejemplo, ¿cuánto mide de lado? ¿Cuánto miden los ángulos internos?

La medida del lado depende del dibujante, quien tiene la libertad de elegir de qué tamaño va a quedar el polígono. Por otro lado, la segunda pregunta tiene una respuesta fija y depende solamente del número de lados del polígono, como veremos más adelante.

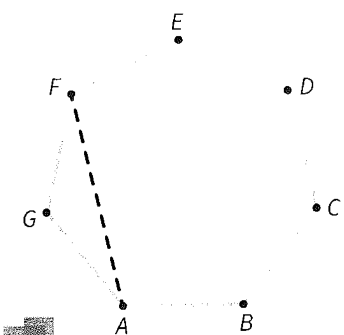


Figura 1.28

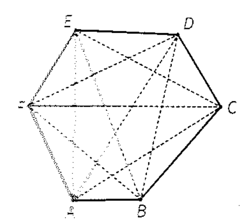
Ahora estudiaremos otro concepto importante de los polígonos: las diagonales.

Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono. En la figura 1.28, se ha marcado una diagonal con un segmento punteado. ¿Cuántos lados tiene el polígono? ¿Cuántas diagonales tiene?

Es fácil convencerse de que el número de diagonales depende del número de lados. Lo difícil es dar una fórmula general para contarlas. Convéncete de que el siguiente enunciado es correcto:

Si un polígono tiene n lados, entonces, el número de diagonales que tiene es:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$



Esta fórmula se puede deducir de la siguiente manera: por cada vértice de un polígono de n lados salen $(n-3)$ diagonales. En total hay n vértices, entonces, un primer estimado es que el número de diagonales es $n \times (n-3)$. Pero en esta cuenta estamos considerando cada diagonal dos veces, una por cada vértice que la define. Así, el número de diagonales del polígono es $n \times (n-3)/2$.

Actividad de aprendizaje 20

Usa la fórmula para hallar el número de diagonales para responder las preguntas.

1. ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero?
2. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono?
3. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono?
4. ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?
5. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 50 lados (figura 1.29)?
6. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 100 lados?
7. Si un polígono tiene 1890 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

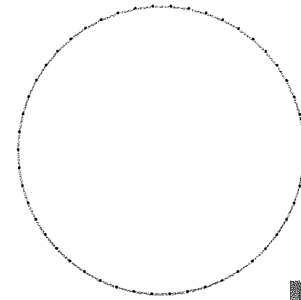
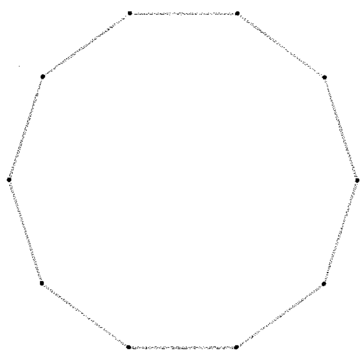


Figura 1.29

Un polígono de cincuenta lados se llama pentacontágono.



8. En una reunión hay 10 personas y todas se saludan entre sí dándose la mano. ¿Cuántos apretones de mano hubo en total?

   Este ejercicio pareciera estar fuera de lugar pero no es así. En matemáticas es común y útil abstraer situaciones de la vida real y representarlas con objetos matemáticos, en este caso puntos y rectas. Si representas a cada persona como un punto y al apretón de manos como un segmento que une los puntos, ¿cuántos segmentos tendrías que dibujar?

Hacia PLANEA

Si un polígono tiene 90 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

a. 15

b. 92

c. 45

d. 30

Suma de los ángulos internos de un polígono regular

Como ya dijimos, la suma de los ángulos internos de un polígono depende del número de lados. Recordemos que en un triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°.

Podemos encontrar la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero si lo partimos en dos triángulos usando una diagonal (figura 1.30). De esta manera, deducimos que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es $2 \times 180° = 360°$.

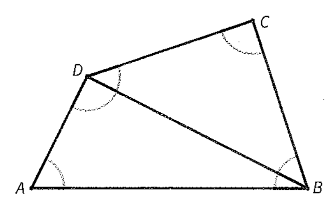


Figura 1.30

De manera similar, un pentágono se puede partir en tres triángulos, como se observa en la figura 1.31, entonces, la suma de los ángulos internos de un pentágono siempre será $3 \times 180° = 540°$.

En general, usando la misma estrategia para cualquier polígono podemos concluir que:

Si un polígono tiene n lados, entonces, la suma de sus ángulos interiores es:

$$180° \times (n - 2).$$

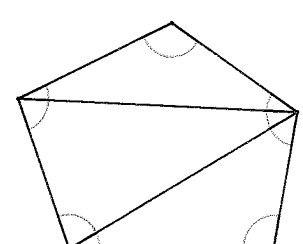
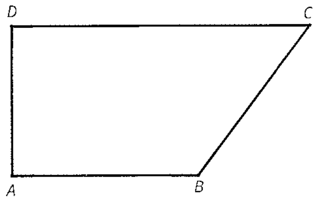


Figura 1.31



Actividad

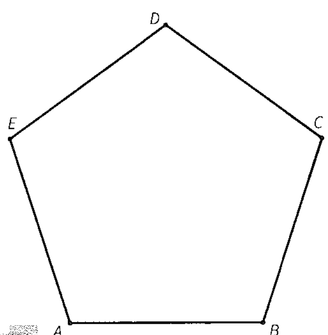
Lleva a cabo lo siguiente.

1. Corrobora con un hexágono que la suma de sus ángulos es 720°.
2. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un octágono?
3. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un decágono (polígono de 10 lados)?
4. Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es 3780°, ¿cuántos lados tiene?
5. En el terreno de mi tío se midieron tres ángulos como se ve en la figura 1.32, ¿cuánto mide el ángulo que falta?

En el caso de los polígonos regulares se tiene que todos los ángulos miden lo mismo, entonces la suma total de los ángulos internos se reparte equitativamente entre todos. Esto expresado como fórmula queda:

Si un polígono regular tiene n lados, entonces, cada uno de sus ángulos interiores mide:

$$\frac{180^\circ \times (n-2)}{n}.$$



Así por ejemplo, en un triángulo equilátero cada ángulo interior mide $180°/3 = 60°$. En un cuadrado cada ángulo interior mide $360°/4 = 90°$. En un pentágono regular cada ángulo mide $540°/5 = 108°$ (figura 1.33).

De la misma manera en que se define un ángulo exterior de un triángulo, también se define un ángulo exterior de un polígono convexo. Aunque no se tiene una propiedad como en los triángulos, sí se tiene una en cuestión de la suma:

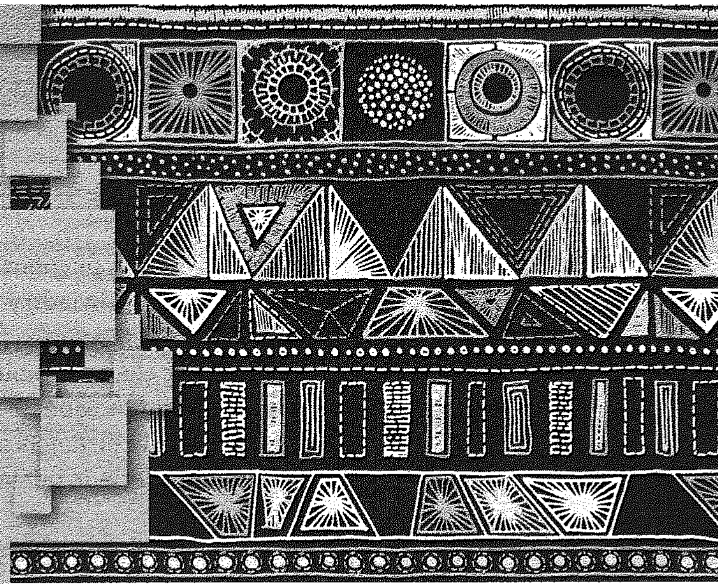
La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados es 360°.

Actividad

Usa la fórmula anterior para responder las preguntas.

1. Para cada uno de los polígonos regulares de 6, 7, y 8 lados, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?
2. Si un ángulo interior de un polígono regular mide 140°, ¿cuántos lados tiene?
3. Dibuja un polígono regular de ocho lados.
4. ¿Cuánto mide un ángulo exterior de un decágono regular?

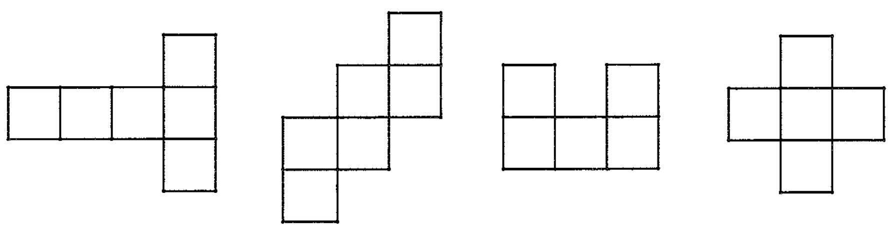
Propiedades de los polígonos



Área y perímetro

Una de las propiedades que nos interesa de los polígonos es su perímetro, es decir, la longitud total de su contorno. Otra propiedad de interés es el área, ésta es una medida para cuantificar la superficie total que abarca una figura.

Antes de pasar a otra cosa, ¿puedes encontrar el perímetro de estas figuras? ¿Y su área?

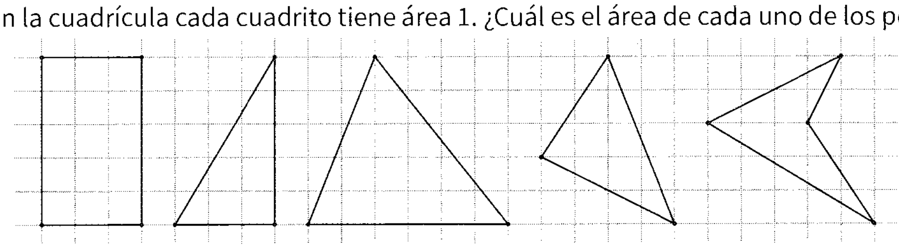


Existen varias fórmulas para calcular el área y perímetro de acuerdo al tipo de figura que se tenga. Algunas regiones son más fáciles de calcular que otras, pero en el fondo siempre usamos el mismo principio. Para el perímetro simplemente hay que medir la longitud total del contorno. Para el área necesitamos una unidad base, por lo general un cuadrito de área 1, y tratamos de ver cuántas veces cabe en la región a medir.

Actividad

Con base en la definición de área, responde lo siguiente.

1. En la cuadrícula cada cuadrito tiene área 1. ¿Cuál es el área de cada uno de los polígonos?

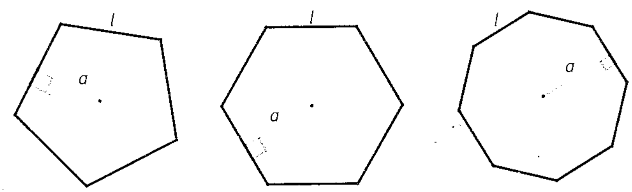


En el caso de los polígonos regulares es fácil determinar su perímetro, sólo hay que saber la medida de un lado y multiplicarla por el número de lados para obtenerlo.

Para calcular el área también necesitamos saber la medida del lado del polígono. Además, necesitamos saber la distancia del centro del polígono al punto medio de uno de sus lados, a esta distancia se le llama apotema. Entonces el área se calcula multiplicando la medida del lado por la altura por el número de lados y al final dividiendo entre dos.

En resumen, el perímetro y área de un polígono regular se pueden calcular así:

$$\text{Perímetro} = nl$$
$$\textit{Área} = nla/2 = Pa/2.$$



Ejemplo

El lado de un pentágono regular mide 10 cm y su apotema mide 6.9 cm. ¿Cuál es su área y su perímetro?

Empecemos con el perímetro, como cada lado mide 10 cm y son cinco lados en total, entonces, el perímetro del pentágono es $5 \times 10 = 50$ cm.

Ahora calculemos el área paso a paso a manera de justificación de la fórmula que aparece arriba. Primero calculamos el área de un triángulo central como el que se muestra sombreado en la figura 1.34. El apotema precisamente hace el papel de altura, así que su área es $10 \times 6.9/2 = 34.5$ cm^2. Luego, un pentágono regular está compuesto por cinco de estos triángulos centrales, así que su área es precisamente $5 \times 34.5 = 172.5$ cm^2. En resumen, el área del pentágono regular se puede calcular como $5 \times 10 \times 6.9/2$, esta última operación corresponde precisamente a la fórmula de área que se dio.

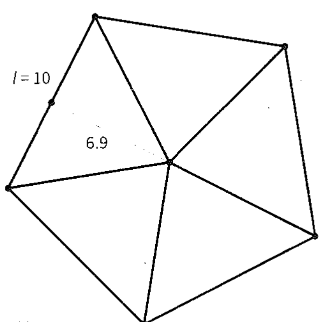
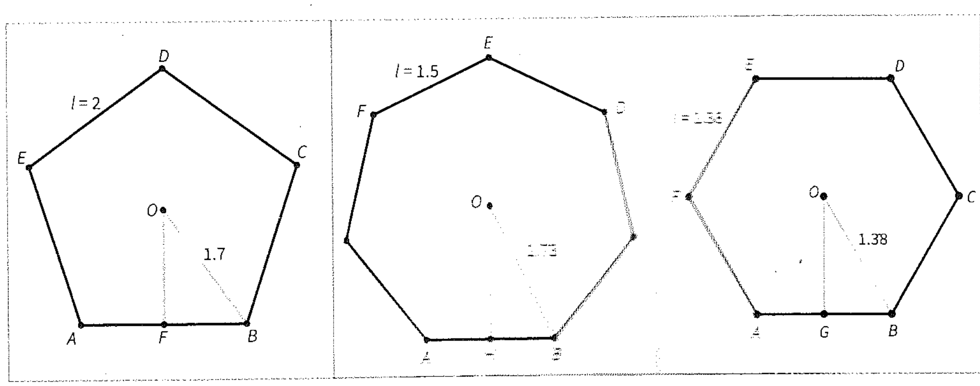


Figura 1.34

Actividad

Halla los perímetros y áreas de los polígonos regulares mostrados en las figuras. Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar las apotemas.



Perímetro y área de regiones circulares

El círculo (figura 1.35) es otro tipo de figura que aparece en muchos contextos. Por lo que es importante saber calcular su área y perímetro.

Ya vimos que el perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$. Por otro lado, el área es πr^2.

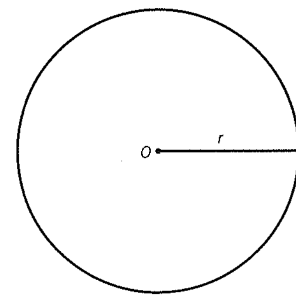


Figura 1.35

En ciertos contextos también aparecen sectores circulares de los cuales necesitamos saber su área y perímetro. En estas fórmulas para calcular el perímetro y el área de un sector circular el ángulo α está en radianes:

$$P = \alpha r + 2r$$
$$A = \alpha r^2/2.$$

Ejemplo

En la figura 1.36 calcula el área sombreada que se encuentra entre el círculo de radio 4 y el triángulo equilátero de lado también 4.

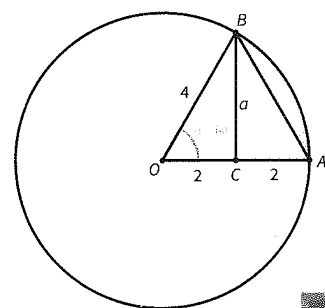


Figura 1.36

La estrategia va a ser obtener el área del sector circular y restarle el área del triángulo equilátero.

Para calcular el área del sector circular primero recordamos que los ángulos interiores de un triángulo equilátero son de 60° que equivale a un ángulo de $\pi/3$ en radianes. Entonces el área del sector circular que se forma con un ángulo de 60° es de $(\pi/3) \times 4^2/2 = 8\pi/3$.

Por otro lado, para calcular el área del triángulo equilátero primero tenemos que saber su altura. Para esto aplicamos el teorema de Pitágoras, nos queda que:

$$2^2 + a^2 = 4^2,$$

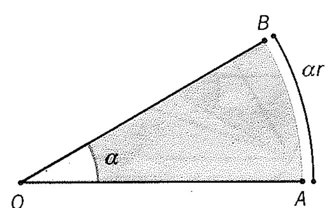


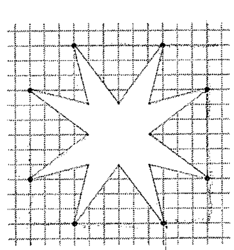
Figura 1.37

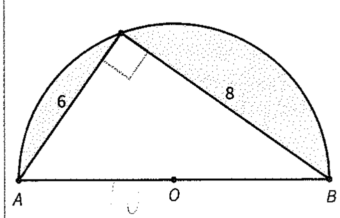
de aquí se obtiene que $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{13}$. Luego, el área del triángulo equilátero es $4a/2 = 4\sqrt{3}$.

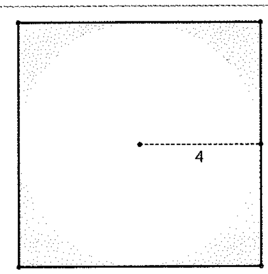
Por lo tanto el área sombreada vale $8\pi/3 - 4\sqrt{3}$ que es aproximadamente 1.449.

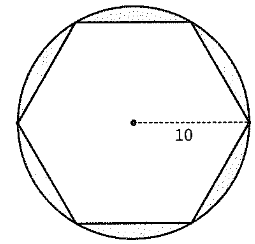
Actividad de aprendizaje 25

Con los datos que se te dan, calcula las áreas sombreadas.





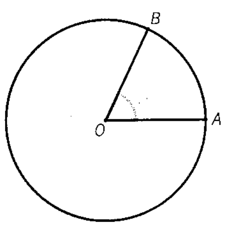
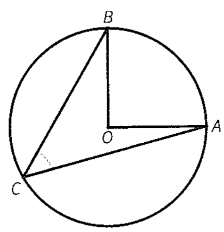
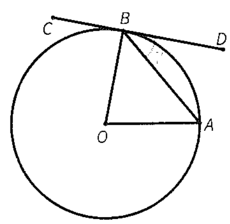
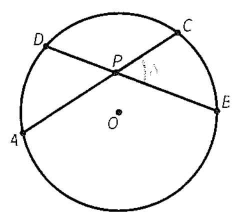
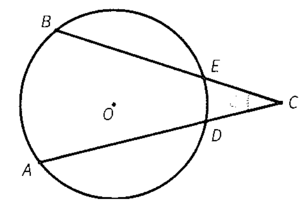




Elementos y propiedades básicas de los ángulos en la circunferencia

Ángulos en la circunferencia

Volvamos a los ángulos. Ahora estudiaremos los ángulos que se forman dentro de una circunferencia. Resulta interesante ver las diferentes relaciones que aparecen.

Tipos de ángulos en la circunferencia				
Central	**Inscrito**	**Semiinscrito**	**Interior**	**Exterior**
				

Teoremas

Para describir las relaciones entre ellos de una manera más sencilla, vamos a usar a la circunferencia y a los arcos como referencia. Recuerda que 360° representa a la circunferencia completa; de la misma manera, una porción de circunferencia representa la cantidad proporcional correspondiente en grados.

Así, tenemos la convención de que un ángulo central mide lo mismo que el arco que abre, escribimos esto como:

$$\angle AOB = \widehat{AB}.$$

Un **ángulo inscrito** siempre va a medir la mitad del arco que abre, es decir:

$$\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

Un **ángulo semiinscrito** va a medir la mitad del arco que abre, es decir:

$$\angle ABD = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

3. Un **ángulo interior** va a medir el promedio de los dos arcos que abre, es decir:

$$\angle BPC = \frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{2}.$$

4. Un **ángulo exterior** va a medir la semidiferencia de los dos arcos que abre, es decir:

$$\angle ACB = \frac{\widehat{AB}-\widehat{DE}}{2}.$$

Ejemplo

Calcula los tres ángulos indicados en la figura 1.38.

Empecemos con el ángulo *BAC*, es un ángulo inscrito y abre el mismo arco que el ángulo central BOC, por lo que debe medir la mitad de este último. De aquí que $\angle BAC = 20°$.

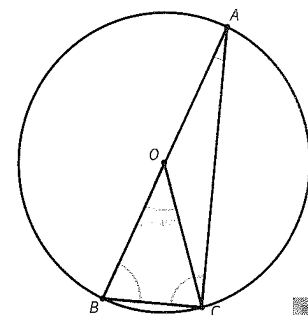


Figura 1.38

Además, como el triángulo ACO *es isósceles, ya que OA = OC por ser radios, entonces también* $\angle OCA = \angle OAC = 20°$.

Ahora, el triángulo *OBC* también es isósceles, así que $\angle OBC = \angle OCB$, además la suma de los ángulos internos de este triángulo debe ser 180°, ya llevamos 40° del ángulo *BOC*, así que los 140° que faltan deben de repartirse equitativamente entre $\angle OBC$ y $\angle OCB$, así que $\angle OBC = \angle OCB = 70°$.

Finalmente, el $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB = 20° + 70° = 90°$.

Ejemplo

Se dibuja un triángulo equilátero dentro de un círculo (figura 1.39). Encuentra la medida de los ángulos marcados.

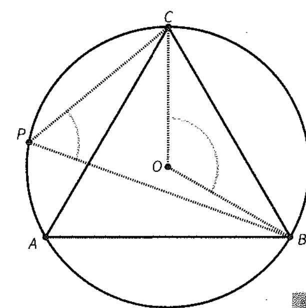


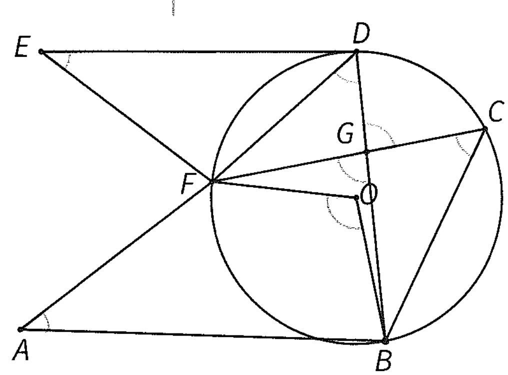
Figura 1.39

Primero, como el triángulo *ABC* es equilátero entonces $\angle CAB = 60°$. Ahora, $\angle COB$ es un ángulo central que abre el mismo arco que $\angle CAB$, por tanto, $\angle COB = 120°$.

Luego, $\angle CPB$ abre el mismo arco que $\angle CAB$, entonces, deben medir lo mismo. De aquí que $\angle CPB = 60°$. Cabe recalcar que aquí no importa en donde esté *P*, siempre que el ángulo $\angle CPB$ abra el mismo arco que $\angle CAB$ se va a tener la igualdad mencionada.

Actividad de aprendizaje 26

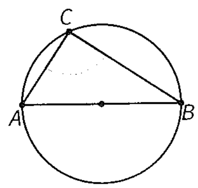
- **Utiliza todas las propiedades aprendidas, desde el primer tema hasta el momento, para responder lo que se pide.**



1. Con base en la figura, escribe los ángulos señalados.
   a. Dos ángulos inscritos: ________ y __________
   b. Dos ángulos exteriores: _______ y __________
   c. Ángulo central: _____________ ____________
   d. Ángulo seiinscrito: _____________ _________
   e. Ángulos interiores: _________ y ____________

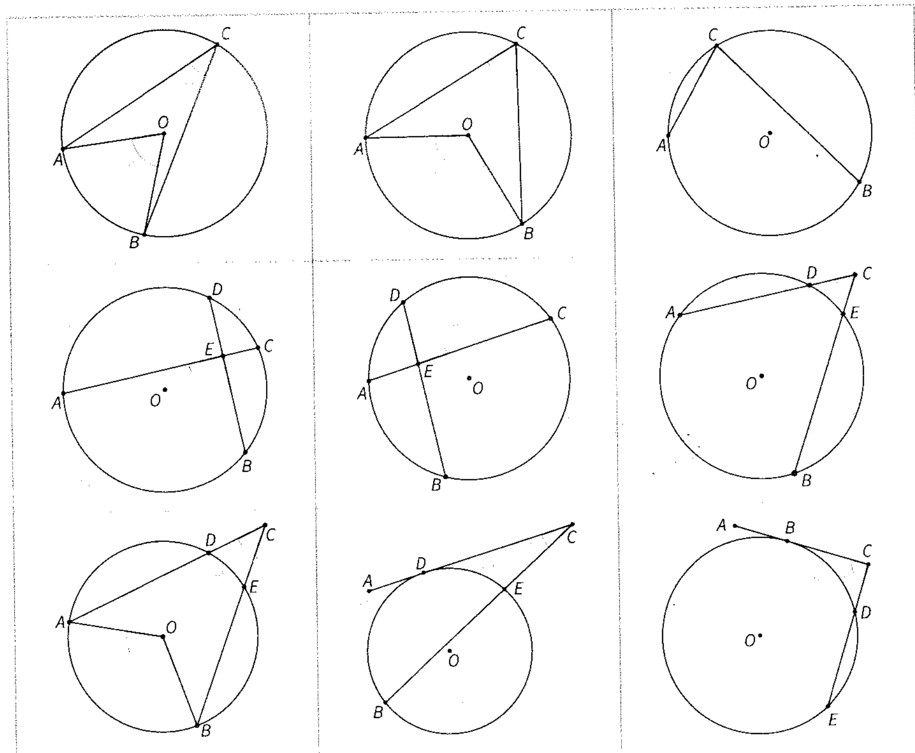
Hacia PLANEA

En la figura, ¿cuánto vale α si se sabe que *AB* es un diámetro?



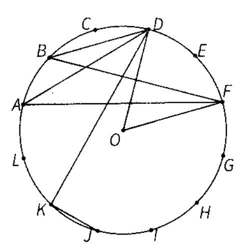
a. 90°
b. 45°
c. 75°
d. 180°

2. Utiliza las propiedades 1, 2, 3 y 4 listadas anteriormente para hallar las medidas de los ángulos indicados.

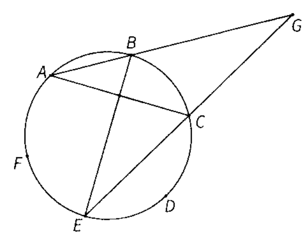


3. Encuentra las medidas de los ángulos marcados.

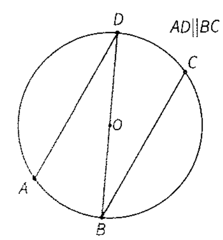
El círculo de la figura se ha dividido en 12 partes iguales.



El círculo se ha dividido en seis partes iguales. Encuentra las medidas de los ángulos α y β.



En la figura sabemos que *AD* es paralela a *BC*.



4. En la figura 1.40 *ED* es tangente a la circunferencia en *A*, *AB* es diámetro y el ángulo *BOC* mide 20°. Encuentra la medida de los ángulos.

a. $\angle BAC$
b. $\angle CAD$
c. $\angle ACO$
d. $\angle EAC$
e. $\angle AOC$

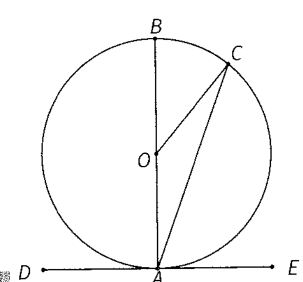


Figura 1.40

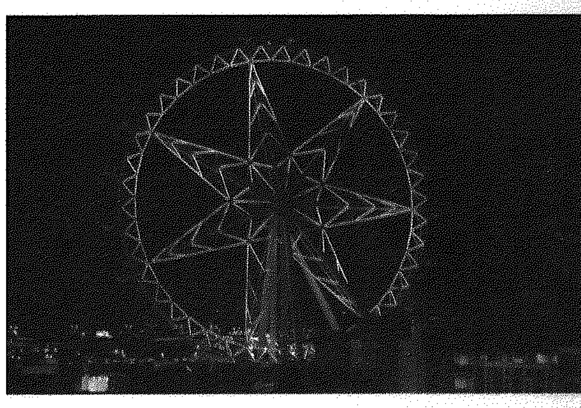
Proyecto integrador

El proyecto tiene como objetivo integrar los conocimientos del primer parcial en una actividad. Desarrolla lo que se pide y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

A lo largo del primer parcial estudiamos ángulos, distancias, áreas y perímetros. Usemos todos estos conocimientos para estudiar el diseño y la geometría de una rueda de la fortuna.

En la imagen se observa una rueda de la fortuna ubicada en Melbourne, Australia. Ésta tiene una altura de 120 m y un diámetro de 110 m.

Con base en la imagen contesta las preguntas.



1. ¿Cuántas cabinas tiene la estrella de Melbourne?
2. Tomando como vértices 3 cabinas, ¿se puede formar un triángulo equilátero?
3. Tomando como vértices 4 cabinas, ¿se puede formar un cuadrado?
4. ¿Qué ángulo se forma en cada una de las puntas de la estrella de 7 picos? Da tu respuesta en grados y en radianes.
5. Según los operadores da una vuelta completa en 30 minutos. ¿Cuántos grados gira por minuto? Da tu respuesta en grados y en radianes.
6. En total, ¿que distancia recorre una persona dentro de una cabina al dar una vuelta?
7. Malcolm está en una cabina en el punto más alto de la estrella de Melbourne, mientras que Angus está en el suelo a una distancia de 90 metros de la base. ¿Qué distancia hay entre Malcolm y Angus?
8. Traza el heptágono regular que se forma con las puntas de la estrella de 7 picos. ¿Cuál es su perímetro y su área? Considera que el círculo azul tiene un diámetro de 95.4 metros y el apotema del heptágono es de 43 metros.

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Convertir de un sistema de medición a otro, medidas angulares.	Convierto ángulos de decimal a sexagesimal.		
	Convierto ángulos de sexagesimal a decimal.		
	Comprendo la definición de radián.		
Trazar y medir ángulos con instrucciones determinadas.	Utilizo un transportador para trazar ángulos.		
	Utilizo un transportador para medir ángulos dados.		
Medir y estimar ángulos (construcción de un astrolabio).	El trabajo presentado demuestra mi interés en la materia.		
	El astrolabio construido es funcional para hallar ángulos.		
Construir triángulos con lados dados, con dos lados y un ángulo dado, o con un lado y dos ángulos dados.	Construyo triángulos con los datos que me dan.		
	Identifico cuando los datos no son suficientes para trazar un triangulo.		
	Identifico qué datos debo conocer para poder construir un triángulo específico.		

Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Distingue conceptos básicos de: recta, segmento, semirrecta, línea curva.	Conozco los conceptos de recta, línea, segmento y semirrecta.	Identifico en situaciones los conceptos de recta, segmento, semirrecta y línea.	Aplico los conceptos de línea, recta, semirrecta y segmento en mi entorno.
Interpreta los elementos y las características de los ángulos.	Conozco la idea intuitiva de ángulo.	Identifico los elementos de los ángulos y sus características.	Aplico mis conocimientos de ángulos en mi entorno.
Mide, manual e instrumentalmente, los objetos trigonométricos y da tratamiento a las relaciones entre los elementos de un triángulo.	Utilizo las herramientas geométricas como el transportador, compás y la regla.	Deduzco, cuando es posible, las medidas de los ángulos o de segmentos sin necesidad del transportador, regla o compás.	Aplico las herramientas como el compás, la regla y el compás para resolver problemas cotidianos.
Trabaja con diferentes sistemas de medición de los ángulos, efectúa conversiones de medidas.	Conozco los distintos sistemas de medición de ángulos.	Opero con ángulos en distintos sistemas de medición.	Opero y convierto ángulos de un sistema de medición a otro, según convenga o según el contexto.
Identifica, clasifica y caracteriza a las figuras geométricas.	Conozco distintos tipos de figuras geométricas como polígonos regulares y polígonos irregulares.	Clasifico las figuras geométricas según sus ángulos o sus lados.	Identifica, clasifica y caracteriza a las figuras geométricas.
Interpreta las propiedades de las figuras geométricas.	Conozco las propiedades de las figuras geométricas.	Comprendo las propiedades de las figuras geométricas y las utilizo para resolver problemas específicos.	Aplico las propiedades de las figuras geométricas en situaciones de mi vida cotidiana.
Relaciona las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas con el uso de materiales concretos y digitales.	Conozco las fórmulas para hallar perímetros, áreas y volúmenes.	Comprendo las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes y puedo descomponer figuras irregulares en partes conocidas para hallar áreas y volúmenes.	Aplico las fórmulas de perímetros, áreas para resolver problemas de mi entorno y de mi contexto.

Segundo parcial

Eje: Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométrico y trigonométrico

- Estructura y transformación: elementos básicos de geometría.

- Tratamiento de las fórmulas geométricas, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.
- Tratamiento visual de las propiedades geométricas, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

- Patrones y fórmulas de perímetro de figuras geométricas. ¿Cuánto material necesito para cercar un terreno? ¿Cuál figura tiene perímetro menor?
- Patrones y fórmulas de área figuras geométricas. ¿Con cuánta pintura alcanza para pintar la pared? ¿Tienen la misma área? ¿Qué área es mayor?• Patrones y fórmulas de volúmenes de figuras geométricas. ¿Las formas de medir volúmenes en mi comunidad? ¿Tienen el mismo volumen?
- Patrones y fórmula para la suma de ángulos internos de polígonos. ¿Para qué puedo usar estas fórmulas generales? ¿La suma de los ángulos internos de un cuadrado es?
- Patrones y fórmulas de algunos ángulos en una circunferencia. "Midiendo los ángulos entre las manecillas del reloj", los ángulos de las esquinas de una cancha de futbol.

- Criterios de congruencia de triángulos y polígonos: ¿Qué tipo de configuraciones figurales se precisan para tratar con polígonos, sus propiedades y estructuras, relaciones y transformaciones? ¿Congruencia o semejanza? El tratamiento de la reducción y la copia. Figuras iguales y figuras proporcionales.
- Teorema de Tales y semejanza de triángulos: ¿Cómo surge y en qué situaciones es funcional? ¿Calculando la altura al medir la sombra? Figuras a escala.

- Significa las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas con el uso de materiales concretos y digitales.
- Caracteriza y clasifica a las configuraciones espaciales triangulares según sus disposiciones y sus relaciones.
- Significa los criterios de congruencia de triángulos constructivamente mediante distintos medios.
- Interpreta visual y numéricamente al teorema de Tales en diversos contextos y situaciones cotidianas.

- Construir triángulos con lados dados, con dos lados y un ángulo dado, o con un lado y dos ángulos dados.
- Reconfigurar visualmente una figura geométrica en partes dadas.
- Estimar y comparar superficies y perímetros de figuras rectilíneas.
- Calcular y argumentar en cuerpos sólidos cuál volumen es mayor.
- Descomponer un polígono en triángulos.
- Construir un triángulo semejante a uno dado.
- Medir la altura de un árbol a partir de su sombra.

¿Qué características no me gustaría poseer?

Para tu vida diaria

Toma un tiempo para reflexionar sobre el día de ayer e identificar si tuviste alguna conducta, actitud o pensamiento relacionado con aquellos que quieres evitar (los del ejercicio 3). Anótalo.

¿Qué harías para mejorar esta conducta, actitud o pensamiento?

¿Puedes observar comportamientos o cualidades en otras personas que no te gustaría tener? Casi siempre es más fácil ver los defectos y las virtudes de otras personas que los propios. Si en vez de juzgar a los demás, aprovechamos lo que vemos en ellos para reflexionar sobre lo queremos imitar y lo que deseamos evitar, las otras personas pueden ser como espejos que nos permitan identificar conductas, actitudes o pensamientos que pueden ocasionarnos problemas o dañar a alguien más.

1. Piensa en alguna persona que tenga actitudes o comportamientos que no te gustan y que no quisieras imitar.
   a. ¿Cómo se comporta?
   b. ¿Qué crees que piensa?
   c. ¿Cuál es su actitud ante la vida?
   d. ¿Qué emociones te provoca ver este tipo de actitudes y comportamientos?
2. En equipos, comenten las respuestas del ejercicio anterior. Luego escriban sus respuestas.
3. Con base en la reflexión del ejercicio anterior, anota tres pensamiento, actitudes o conductas que quieres evitar en tu vida.
   a. De las conductas o actitudes anteriores, elige la que te parezca más importante a prestar atención para evitarla.
   b. ¿Qué puedes hacer para evitarla?

Resumen

Si bien lo que valoramos es muy importante ya que nos proporciona un sentido de dirección en la vida, es igualmente importante reflexionar sobre lo que queremos evitar. En caso de que identifiques alguna conducta, actitud o pensamiento no deseado, el entrenamiento en las habilidades socioemocionales te ayudará a trabajar con ellos. El primer paso es reconocerlo y estar alertas a cuando actuamos de esa manera.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

1. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama general de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

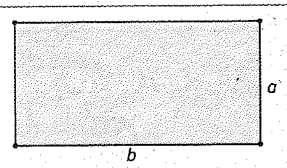
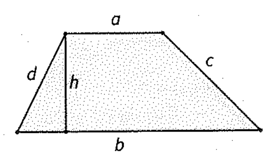
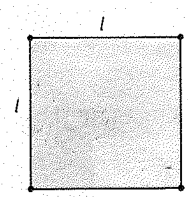
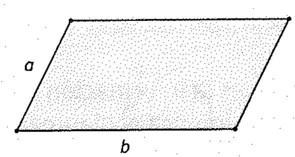
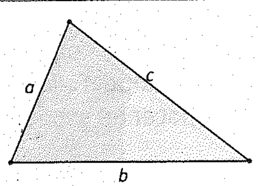
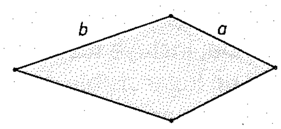
Proyecto de vida de: ____

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			

Patrones y fórmulas de perímetros de figuras geométricas

¿Cuánto material necesito para cercar un terreno?

Empecemos repasando las fórmulas para calcular perímetros y áreas de ciertos polígonos especiales. Éstos forman la base para calcular el área y el perímetro de polígonos más complicados.

	**Rectángulo** Perímetro = $2b + 2a$		**Trapecio** Perímetro = $a + b + c + d$
	**Cuadrado** Perímetro = $4l$		**Paralelogramo** Perímetro = $2a + 2b$
	**Triángulo** Perímetro = $a + b + c$		**Papalote** Perímetro = $2a + 2b$

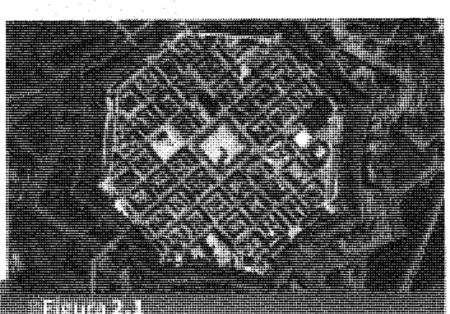


Figura 2.1

Fortificación del pueblo francés Neuf-Brisach, en la frontera con Alemania.

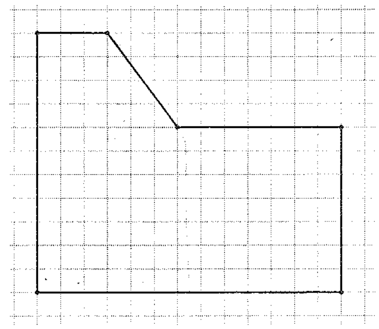
La planeación de un perímetro adecuado para una ciudad es de mucha importancia. Un buen ejemplo es el pueblo francés de Neuf-Brisach en la frontera con Alemania. Su perímetro representa lo más avanzado en diseño de fortificaciones de principios del siglo XVIII. La primera línea de defensa, la más externa, consiste en varias zanjas profundas con forma de estrellas excavadas en la tierra para dificultar el avance enemigo y forzarlo a romper formación. La segunda línea de defensa es una muralla con forma octagonal. En la figura 2.1, los lados del octágono se observan ligeramente curveados hacia adentro, esto con la finalidad de proteger en su totalidad cada lado del octágono desde las torres de vigilancia ubicadas en cada vértice. Como puedes imaginar, llevar a cabo ese trabajo fue una gran hazaña de diseño y de ingeniería.

En esta sección no vas a calcular el perímetro de esa fortificación, pero sí de una figura más sencilla. Recuerda que vimos cómo calcular distancias de distintas maneras, siendo el teorema de Pitágoras de mucha utilidad para “medir diagonales”. En la siguiente actividad vas a obtener el perímetro de una figura para calcular la cantidad de alambre que se necesita para cercar un terreno.

Actividad de aprendizaje 1

Lee la situación y responde las preguntas.

Mi tío tiene un terreno como el que se muestra en la figura y lo quiere cercar con alambre. Va a colocar postes de madera a lo largo del contorno a cada 5 m y los va a usar para sujetar el alambre. Además, quiere darle tres vueltas con el alambre, cada vuelta a diferente altura, para asegurar que las vacas del vecino no entren a su terreno.



En la figura a escala, cada cuadrito representa un área de 10 m × 10 m.

1. ¿Cuántos metros de alambre va a necesitar?
2. ¿Cuántos postes va a necesitar?

¿Cuál figura tiene perímetro menor?

Es muy común encontrarse en situaciones donde hay que comparar dos cantidades y decidir cuál es la menor o mayor. En particular, problemas de comparar distancias y perímetros son muy recurrentes, por ejemplo, ¿cuántos pasos para llegar a un lugar? ¿A qué distancia debemos colocar los postes de un cercado o las columnas de una construcción?

Aquí aprenderemos, a manera de ejemplo, acerca de un aparato llamado odómetro de rueda que sirve para medir distancias. Como se ve en la figura 2.2, el odómetro es básicamente una rueda equipada con un engranaje que se empuja mientras el engranaje lleva la cuenta de la distancia que avanza la rueda. Este aparato sirve principalmente para medir distancias largas, ya que se evita el estar estirando y levantando una cuerda o un flexómetro. Los coches por ejemplo, ya traen un odómetro adaptado a las llantas y de esta manera se mide el kilometraje que lleva recorrido el coche.

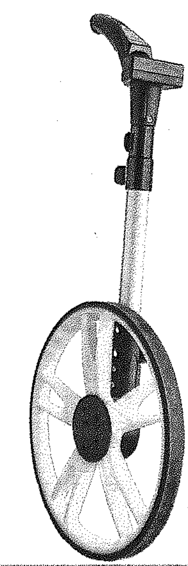


Figura 2.2
Odómetro de rueda.

Ejemplo

Si queremos que una vuelta del odómetro marque 1 metro de distancia, ¿qué diámetro debe tener la rueda del odómetro?

Para responder esta pregunta aplicamos la fórmula de perímetro, pero ahora nos damos cuenta que el dato que nos dan es el perímetro de la rueda, que es 1 metro, y nos piden el diámetro. Entonces tenemos que despejar de la fórmula del perímetro para obtener $d = 2r = P/\pi$. Al sustituir $P = 1$ m y $\pi = 3.1416$, nos queda que d vale aproximadamente 0.3183 m o 31.83 cm.

Algo importante en este tipo de situaciones es la precisión. Si estamos diseñando un odómetro queremos que realmente marque la distancia correcta. Esto está relacionado con la cantidad de cifras decimales que incluimos en la respuesta. Aquí hemos considerado cuatro cifras decimales. Con esta respuesta, ¿qué precisión podemos asegurar al medir 100 m? Y, ¿al medir 1 000?

Veamos primero que si diseñamos un odómetro que mida 0.3183 m de diámetro, entonces, su perímetro va a ser de 0.9999 m, esto quiere decir que por cada metro va a haber una discrepancia de 0.0001 m entre lo que marque el odómetro como 1 metro y lo que en realidad es 1 m, es decir, tenemos una precisión de 99.99 %.

Entonces en 100 m, la discrepancia será de 0.01 m o 1 cm, lo cual no es tan malo; en 1 000 m la discrepancia será de 0.1 m o 10 cm, lo cual ya empieza a ser una distancia considerable. Y así sucesivamente, entre más larga sea la distancia a medir, mayor será la discrepancia entre la distancia que marque el odómetro y la distancia real. De aquí la importancia de estar consciente de la precisión que se pierde al truncar los números hasta cierta cantidad de decimales.

Actividad

Lee la siguiente situación y responde la pregunta.

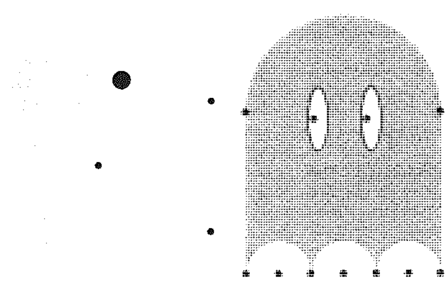


Figura 2.3

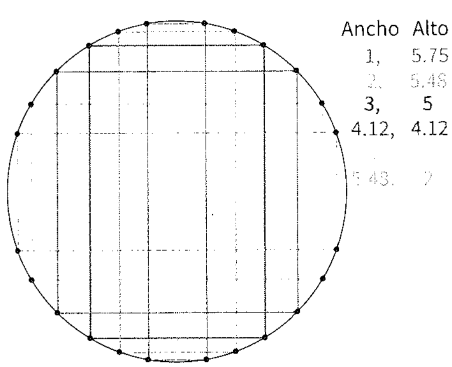


Figura 2.4

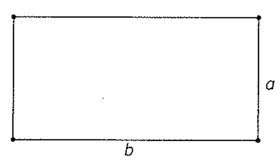
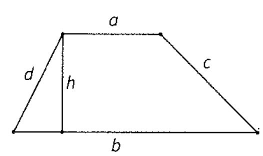
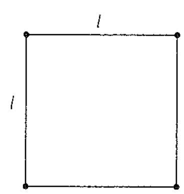
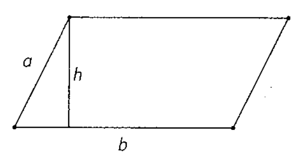
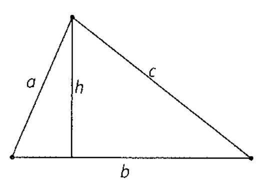
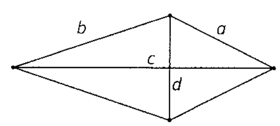
1. En el juego de Pacman aparecen dos personajes como los que se ven en la figura 2.3. Pacman es un círculo de 24 mm de radio con una abertura desde el centro de 60° a manera de boca. El contorno del fantasma está formado por un semicírculo de 18 mm de radio (la parte de arriba de su cabeza), dos segmentos de 30 mm de longitud cada uno y tres semicírculos de 6 mm de radio (las onditas de abajo de su sábana). Si el que tiene mayor perímetro se come al otro, ¿cuál de los dos ganaría?

2. Calcula el perímetro de los rectángulos de la figura 2.4 y compáralos. Las dimensiones de cada rectángulo están indicadas en la imagen.
   a. ¿Cuál es el que tiene un mayor perímetro?
   b. ¿Cuál es el que tiene menor perímetro?
   c. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con menor perímetro que puedes inscribir en la circunferencia?

Patrones y fórmulas de áreas de figuras geométricas

¿Con cuánta pintura alcanza para pintar la pared?

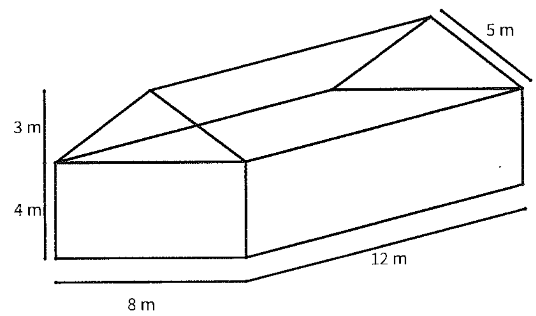
En las actividades anteriores trabajamos el perímetro. Ahora nos toca trabajar áreas. Como te puedes imaginar, saber el área de un terreno es muy importante para el dueño. Otras profesiones donde las áreas juegan papeles importantes son en la pintura y en la carpintería. Un pintor necesita saber el área total a pintar para dar un presupuesto de cuánto va a cobrar y de cuánta pintura va a utilizar. Un carpintero necesita longitudes y áreas para saber la cantidad y la forma de la madera que va a utilizar. Y así podemos seguir, albañiles, arquitectos, de una u otra manera necesitan calcular áreas.

	**Rectángulo** Área = ab		**Trapecio** Área = $(a + b)h/2$
	**Cuadrado** Área = l^2		**Paralelogramo** Área = bh
	**Triángulo** Área = $hb/2$		**Papalote** Área = $cd/2$

En ocasiones, una figura es muy complicada y no se ve una manera clara de cómo obtener su área. Una estrategia común es dividir a la figura en partes más sencillas, triángulos o cuadriláteros, ya que el área de éstos es más fácil de calcular. En las siguientes actividades puedes utilizar esta estrategia y todo lo aprendido anteriormente para calcular diferentes tipos de áreas.

Actividad de aprendizaje 8

Lee las situaciones y responde las preguntas.



1. Un pintor usa un bote de pintura para pintar una parte de una pared. La siguiente porción de pared que va a pintar mide el doble de ancho y el doble de alto. El pintor dice que va a necesitar dos botes de pintura. ¿Es cierto lo que dice?
2. Se quiere pintar una casa como la que se muestra en la figura. Calcula los botes de pintura que se van a necesitar si se sabe que un bote de pintura rinde 10 m^2.

¿Tienen la misma área?

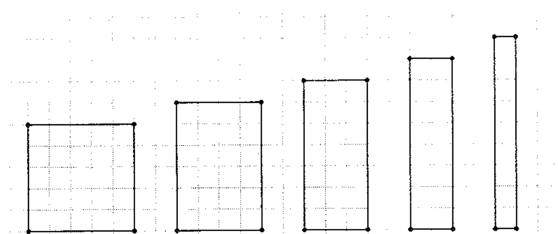


Figura 2.5

Al igual que con el perímetro, a veces tenemos que comparar el área entre dos regiones. Es más, también nos pueden dar restricciones. Por ejemplo, en esta figura 2.5 se muestran varias figuras con el mismo perímetro, ¿cuál tiene el área mayor?

Ahora veamos cómo la información de área nos ayuda a deducir otras cosas. A m anera de ejemplo hagamos una demostración del teorema de Pitágoras que se basa en obtener el área de un cuadrado de dos maneras diferentes.

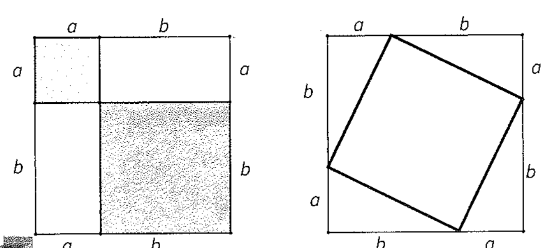


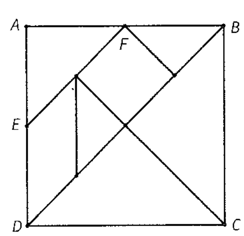
Figura 2.6

En la figura 2.6, el área del cuadrado de la izquierda es $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Por otro lado, el área del cuadrado de la derecha es $c^2 + 4(ab/2) = c^2 + 2ab$.

Pero ambos son el mismo cuadrado de lado $a + b$, por lo que deben tener la misma área. Al igualar las dos expresiones nos queda $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, que se simplifica a $a^2 + b^2 = c^2$, que es precisamente el enunciado del teorema de Pitágoras.

Actividad de aprendizaje

Responde las preguntas.



1. Calcula el área de cada una de las partes del tangram que mide 12 cm × 12 cm. Toma en cuenta que los puntos E y F son los puntos medios de los segmentos AD y AB, respectivamente.
2. ¿Qué partes tienen la misma área?
3. ¿Cuánto mide la diagonal del cuadrado que contiene a todas las piezas?

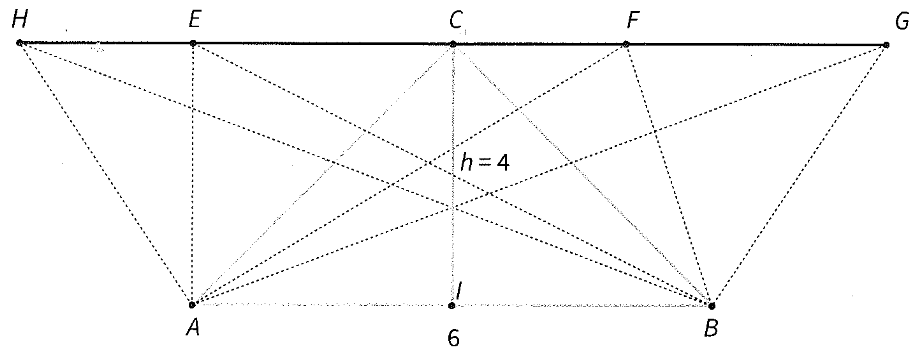
¿Qué área es mayor?

Una manera de resolver la actividad del tangram es dividiendo a todas las figuras en triángulos iguales al más pequeño de la figura. De esta manera, es más fácil y directo comparar todas las áreas. Este tipo de estrategias es muy útil para calcular áreas, a veces hay que dividir en cuadritos, otras en triangulitos u otro tipo de figura, ya depende de cada problema.

Actividad de aprendizaje 5

Resuelve.

1. Volviendo al juego de *Pacman*. Calcula el área de *Pacman* y del fantasma.
2. Halla las áreas de los triángulos *ABH*, *ABE*, *ABC*, *ABF* y *ABG* y compáralas. Toma en cuenta que *AB* es paralela a *HG*.



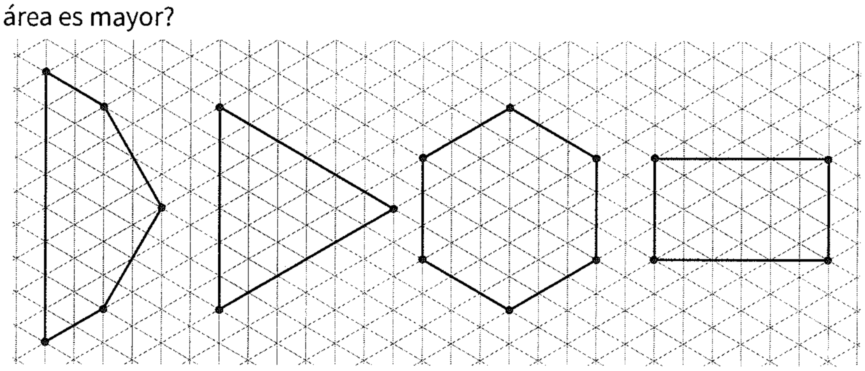
Escribe un argumento del porqué de tu resultado.

Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

Copia la figura en una hoja independiente y responde las preguntas. Guarda tu trabajo como evidencia de tu aprendizaje.

1. En esta figura se muestra una enmallada hecha con triangulitos equiláteros que tienen área 1.
   a. ¿Cuál es el área de cada una de las figuras?
   b. ¿Qué área es mayor?



Patrones y fórmulas de volúmenes de figuras geométricas

Las formas de medir volúmenes en mi comunidad

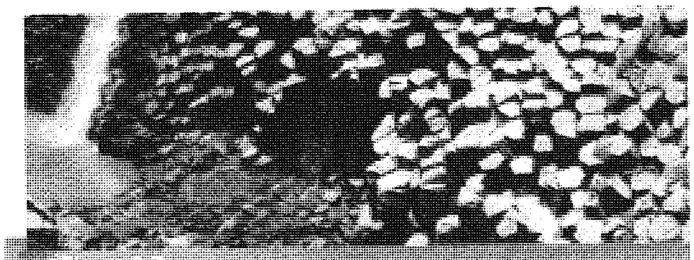
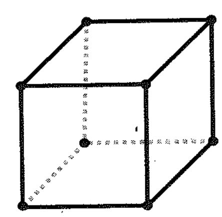
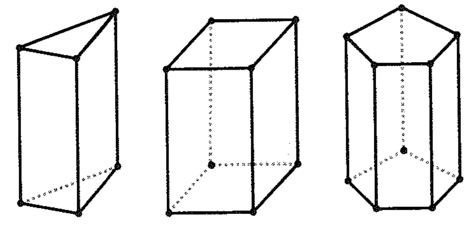
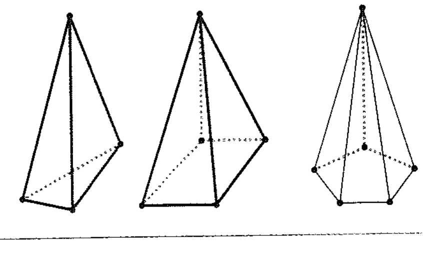


Figura 2.7

Los prismas basálticos son una formación rocosa que se caracteriza por su forma geométrica. Esta impresionante zona está ubicada en Huasca de Ocampo, Hidalgo.

Ahora estudiaremos ciertos sólidos conocidos como poliedros. Estos son la versión tridimensional de los polígonos planos que hemos visto, de hecho, la característica principal de los poliedros es que sus caras son polígonos. Los elementos de un poliedro son caras, aristas y vértices.

A continuación se presentan las fórmulas para encontrar el volumen de algunos poliedros.

Cubo Volumen = lado^3	
Prismas Volumen = área de la base × altura	
Pirámides Volumen = área de la base × altura/3	

Ejemplo

Unos ratones geométricos comen un pedazo cúbico de queso de manera muy especial. Sólo comen cuatro esquinas del cubo como se muestra en la figura 1.39, dejando el tetraedro sombreado que queda en el centro sin comer. Si el cubo de queso mide 6 cm de lado, ¿qué cantidad de queso queda sin comer?

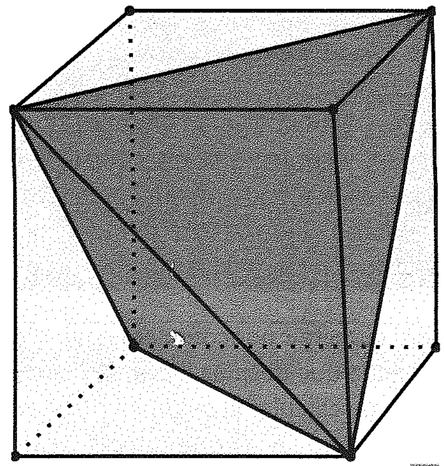


Figura 2.8

El volumen del cubo de queso original es de $6 \times 6 \times 6 = 216\ cm^3$.

Luego, cada esquina que se comen es una pirámide triangular cuya base tiene un área de $6 \times 6/2 = 18\ cm^2$. La altura de la pirámide es también 6 cm, así que su volumen es $18 \times 6/3 = 36\ cm^3$.

Finalmente, como son cuatro esquinas las que se comen los ratones, entonces, el volumen del pedazo central que queda sin comer es de $216 - 4 \times 36 = 216 - 144 = 72\ cm^3$.

Glosario

Glosario.

Tetraedro (del griego cuatro caras), es otra forma de llamarle a una pirámide triangular.

Un tetraedro regular es aquel cuyas caras son triángulos equiláteros.

Actividad de aprendizaje 7

En esta actividad construirás un tetraedro regular. Necesitas dos hojas de papel cuadradas idénticas, cinta adhesiva y tijeras.

1. Primero pones una hoja encima de la otra y pegas TRES de sus orillas con cinta adhesiva. Así obtienes una hoja doble con un lado libre que luego vas a usar para “inflar las hojas” y formar el tetraedro. Pero primero tienes que prepararlo, ya que sus caras deben ser triángulos equiláteros.
2. Sobre la hoja doble dibuja un triángulo equilátero como se observa en la figura 2.9 y traza la línea paralela a AB que pasa por E. E está cerca del lado sin cinta adhesiva. Luego corta a lo largo de esta línea.
3. Ahora marca dobleces que ayudarán a darle forma al tetraedro al momento de “inflarlo”. Para esto dobla a lo largo de AE, asegúrate de doblar tanto hacia arriba como hacia abajo, haz lo mismo a lo largo de BE. Estas líneas servirán luego como aristas del tetraedro.
4. Finalmente, ya estás listo para el “inflado”. Separa el lado libre que no pegaste y levanta una hoja hasta que E quede lo más arriba posible y C coincida con D. Los lados libres no pegados de cada hojita deben coincidir consigo mismo. Ahora pega esta nueva arista que se ha formado para que el tetraedro quede firme y ¡listo!
5. ¿Por qué el sólido que se ha formado es un tetraedro regular?

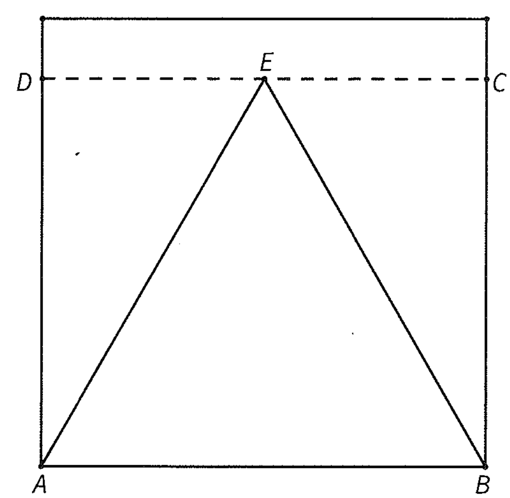


Figura 2.9

¿Tienen el mismo volumen?

Poder comparar volúmenes también es de mucha importancia, por ejemplo, ¿cómo sabes cuánto aire le cabe a tus pulmones? ¿O cuánta gasolina le cabe al tanque de un coche?

Ya vimos cómo calcular el volumen de ciertos tipos de sólidos, sin embargo, muchas veces en la práctica calcular volúmenes es muy difícil, ya que nos encontramos con formas muy irregulares. Por ejemplo, imagínate que quieres obtener el volumen de una pepita de oro. Puedes empezar a medirla y tratar de aproximarte primero con un prisma rectangular, pero este método es poco preciso y tedioso. Una forma más fácil es usando agua.

Resulta que al sumergir por completo cualquier objeto en agua, el volumen del objeto es igual al volumen del agua que desplaza. Esto se conoce como principio de Arquímedes, ya que él lo descubrió al tratar de calcular el volumen de una corona (supuestamente) de oro, tarea que el rey le había encargado y que tenía que cumplir a cabalidad.

Entonces, regresando a nuestro problema de calcular el volumen de una pepita de oro: basta sumergirla en agua en un recipiente graduado, entonces, el volumen de la pepita es precisamente la diferencia entre lo que marcó el agua antes y después de sumergirla.

Puedes practicar usando este método para obtener el volumen de una piedra o cualquier cosa que tengas a la mano.

Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

Lee las situaciones y responde las preguntas.

1. Halla los volúmenes de los poliedros.

   Prisma que tiene por base un pentágono regular de lado 5 cm, 4.25 de radio y altura de 10 cm.

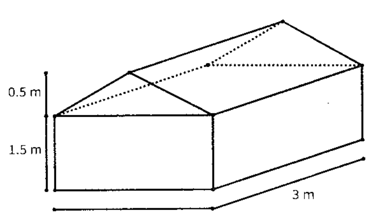
   Cubo de 15 centímetros de lado.

   Prisma que tiene por base un octágono regular de lado 15 cm, una apotema de 18.11 cm y altura de 5 cm.

   Pirámide con base octagonal regular, con área de 77.25 cm^2 y altura de 3 cm.

   Pirámide que tiene por base un pentágono de lado 20 cm, una apotema de 13.76 cm y de altura 7 cm.

   Prisma que tiene por base una rectángulo cuyo largo mide 3 cm, su ancho 1 cm y su altura 4 cm.



2. El lobo feroz tiene una gran capacidad pulmonar, él puede soplar 500 litros de aire en una sola exhalación. Si el lobo feroz logra soplar más aire que el que le cabe al granero de la figura, entonces, logrará tirarlo. ¿Estarán los tres cerditos a salvo adentro del granero?

   El lobo feroz se da cuenta que él solito no va a poder derribar la casa, así que va a llamar a sus amigos. ¿Cuántos lobos feroces serán necesarios para derribar el granero?

Patrones y fórmula para la suma de ángulos internos de polígonos

¿Por qué puedo usar estas fórmulas generales?

Recuerda que vimos que la suma de los ángulos internos de cualquier polígono está dada por la fórmula:

$$180° \times (n - 2)$$

Pero… ¿Qué nos garantiza que una fórmula funciona? ¡Una demostración! En matemáticas no basta con afirmar que algo es cierto, hay que demostrarlo. Por ejemplo la demostración de que la suma de los ángulos internos es 180° es la siguiente:

Dado un triángulo cualquiera, sin pérdida de generalidad tomamos un lado como base (AB) y trazamos una paralela (DE) a ese lado que pasa por el vértice opuesto (C), como muestra la figura 2.10. Dado que son paralelas, los ángulos α y δ son iguales, por ser alternos internos; análogamente $\gamma = \varepsilon$. Dado que δ, β y ε están sobre un segmento, forman un ángulo llano, así $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

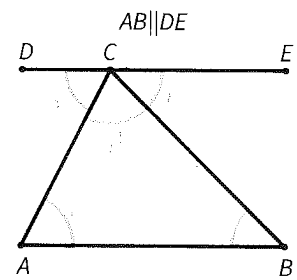
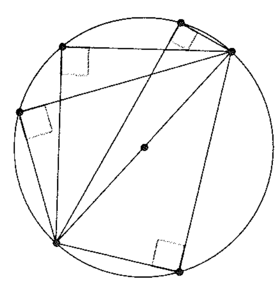


Figura 2.10

Con lo anterior podemos afirmar que para cualquier triángulo se cumple esa propiedad. Ahora es tu turno de demostrar algunas propiedades, así que recuerda todo lo visto anteriormente porque utilizarás varias propiedades.

Actividad

Lleva a cabo las siguientes demostraciones.

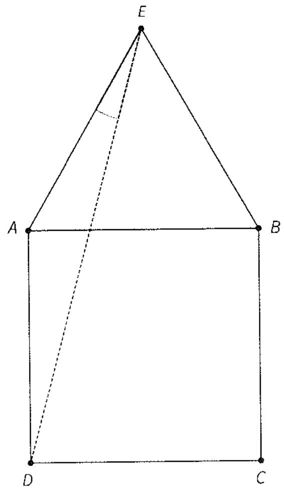


1. Demuestra que en todo polígono convexo la suma de sus ángulos internos es 360°.
2. Demuestra que en toda estrella de cinco picos, la suma de los ángulos de los picos es 180°.
3. Demuestra que todo ángulo inscrito en una circunferencia que subtiende un diámetro es recto.
4. Investiga acerca de la inducción matemática para demostrar proposiciones que dependen de una variable natural y demuestra la fórmula para calcular la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.

Ejercicio extra

Demuestra que si tienes una terna de números a, b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo que tiene por lados a, b y c es rectángulo.

¿La suma de los ángulos internos de un cuadrado es...?



Un cuadrado tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. Además, sabemos que cada ángulo interno mide exactamente 90° y en total la suma de los ángulos internos es 360°.

Ahora veremos un ejemplo de cómo combinar conocimientos acerca de longitudes y ángulos para obtener información que en un principio parece escondida.

En la figura se observan un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *ABE*. ¿Cuánto mide el ángulo *AED*?

Primero, los ángulos del cuadrado son todos de 90°.

Por otra parte, los ángulos del triángulo equilátero son todos de 60°.

Hasta ahora todo bien, ¿pero cómo se encuentra la medida del ángulo *AED*?

La clave está en las distancias. Los lados del cuadrado son todos iguales, es más, también son iguales a los del triángulo equilátero ya que tienen un lado en común. Entonces el segmento *AE* mide lo mismo que el segmento *AD*, es decir, el triángulo *AED* es isósceles.

De aquí podemos deducir que los ángulos *ADE* y *AED* son iguales. Además, junto con el ángulo *DAE* deben sumar 180°. Pero sabemos que al ángulo *DAE* lo componen un ángulo de 90° y uno de 60°, entonces su medida es de 150°. Por lo tanto, los 30° que faltan para 180° se lo tienen que repartir equitativamente entre $\angle ADE$ y $\angle AED$.

Entonces, concluimos que $\angle AED$ mide 15°.

Actividad de aprendizaje 10

Lee la situación y responde lo que se pide.

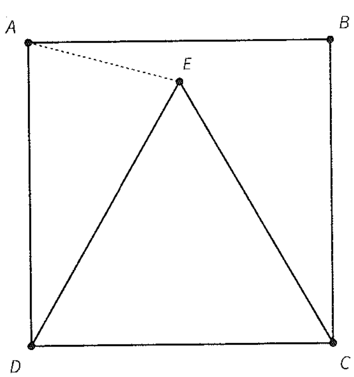
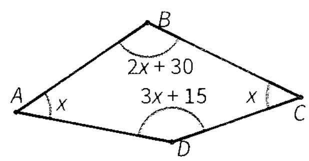
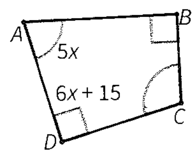
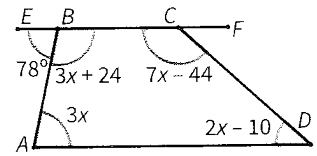


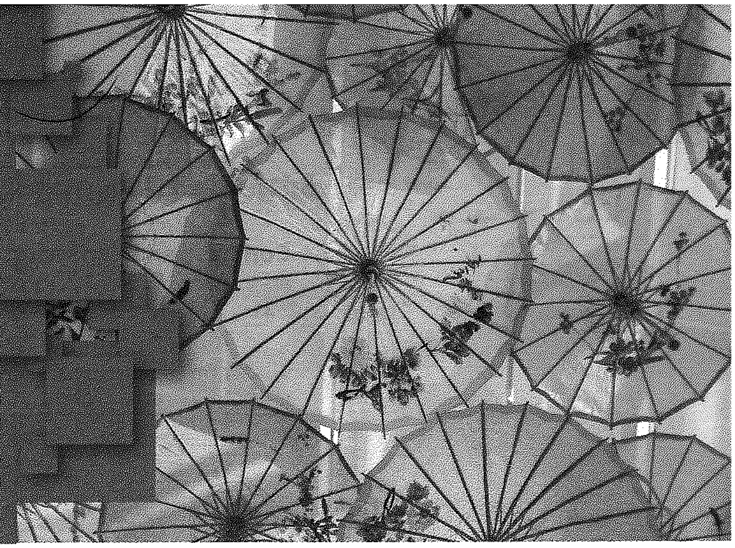
Figura 2.11

1. Usa la misma idea del ejemplo anterior para encontrar la medida del ángulo *AED* en esta figura 2.11, que ahora consta de un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *EDC* dentro de él.
2. En cada ejercicio, halla el valor de *x* para conocer el valor de cada ángulo.









Patrones y fórmulas de algunos ángulos en la circunferencia

Midiendo los ángulos entre las manecillas de un reloj

Midamos otro tipo de ángulos, unos más dinámicos, como las manecillas del reloj.

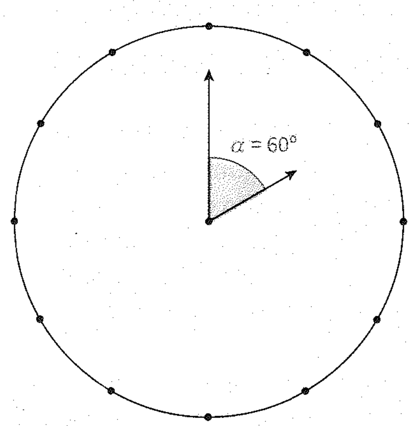
Primero, recordemos que toda la vuelta del círculo equivale a 360°. Como el reloj está dividido en 12 horas, cada hora va a representar 360°/12 = 30°.

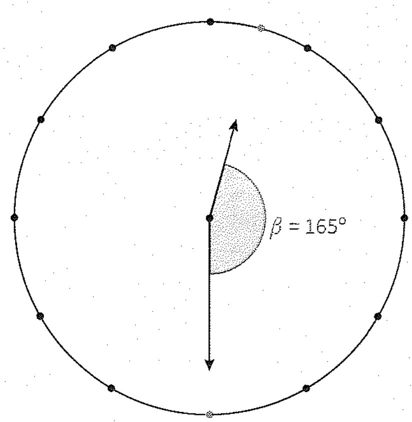
Así, por ejemplo, cuando el reloj marca la 1:00 el ángulo que forman las manecillas es de 30°. Cuando el reloj marca las 2:00 el ángulo que forman las manecillas es de 60° y así sucesivamente.

Sin embargo, calcular el ángulo de las manecillas cuando no es una hora exacta se vuelve más difícil. Por ejemplo, ¿cuál es el ángulo de las manecillas cuando son la 12:30?

Para resolver esta pregunta notemos que el horario avanza un ángulo de 30° por cada hora. Por otro lado, el minutero da una vuelta completa cada hora, es decir, avanza 360°. Esto quiere decir que por minuto, el horario avanza 0.5°, mientras que el minutero avanza 6°.

Con esto en mente, podemos encontrar el ángulo que forman el horario y el minutero cuando son las 12:30. Empecemos cuando son las 12:00, ambos, el horario y el minutero apuntan al 12, formando un ángulo de 0° entre ellos. Después de media hora, el minutero avanzó 180°, posicionándose frente al 6, mientras que el horario avanzó solamente 15° posicionándose en medio del 12 y el 1. Por tanto, el ángulo que forman el horario y el minutero es de 180° – 15° = 165°.





TIC

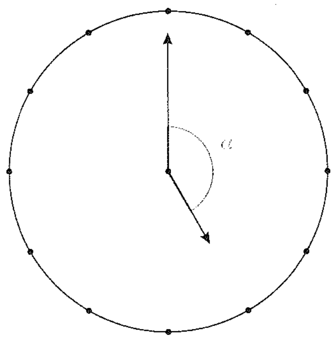
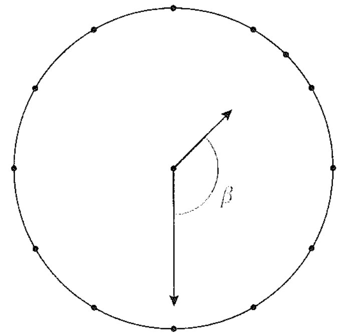
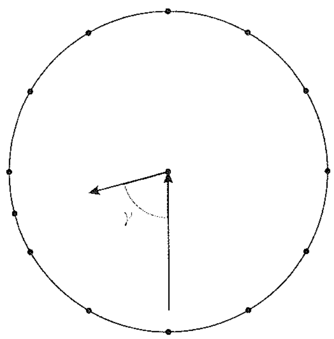
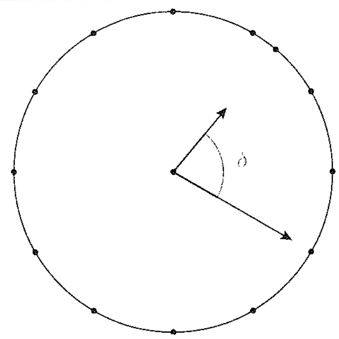
Puedes jugar con el reloj interactivo para ver más ángulos.

http://bkmrt.com/dSrgCX

Actividad de aprendizaje 11

Con base en lo anterior, responde la siguiente actividad.

1. Calcula el ángulo que forman las manecillas del reloj a las siguientes horas. Primero de manera teórica usando lo aprendido en esta sección y luego corrobora con el transportador.

5:00	1:30
	
8:30	**1:20**
	

Cubriendo una región plana con polígonos regulares

Como ya vimos, la medida de los ángulos interiores de un polígono regular es $180° \times (n - 2)/n$. Una pregunta interesante es, ¿cuándo el ángulo que se obtiene cabe exactamente en 360°? Dicho de otra manera, ¿cuándo podemos juntar varias copias de un mismo polígono regular pegándolos uno al lado del otro alrededor de un solo vértice sin que se traslapen y cubran toda la vuelta? La respuesta es que solamente se puede con triángulos equiláteros, con cuadrados y con hexágonos regulares.

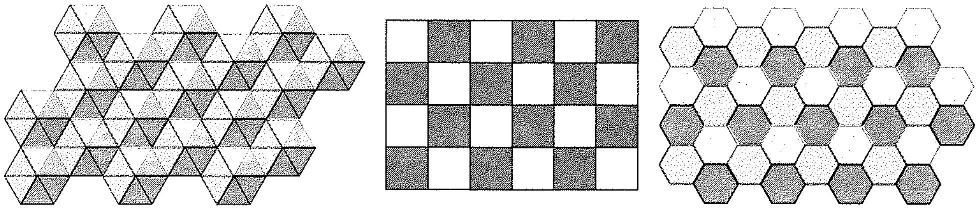
La pregunta anterior esta está relacionada con la siguiente pregunta, ¿con qué polígonos regulares es posible llenar todo el plano al pegarlos uno al lado del otro sin que se traslapen? Resulta que la respuesta es la misma: con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

TIC

Visita la siguiente página para ver otros tipos de teselaciones

http://bkmrt.com/BzJqRr

En la figura se ilustra como llenar el plano con estas tres figuras. Se han utilizado colores para resaltar la simetría y los patrones que se pueden formar.



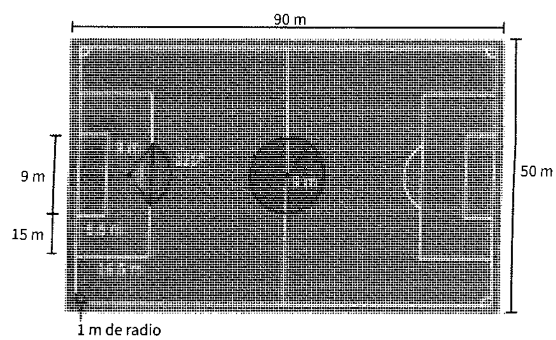
Es por la simetría y los patrones que se forman, que este tipo de figuras aparecen recurrentemente en arreglos geométricos planos como los azulejos de una pared, el adoquín en las calles o en la cuadrícula de las hojas de tu cuaderno. Este tipo de figuras se llaman teselaciones del plano y aquí sólo hemos presentado aquellas que se obtienen con polígonos regulares.

Intenta por tu cuenta llenar el plano con pentágonos regulares, ¿qué falla?

Actividad de aprendizaje 12

Lee la situación y responde la pregunta.

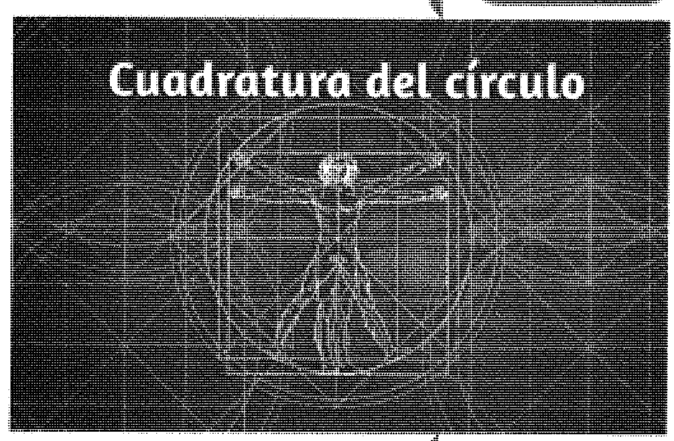
1. Un kilo de cal alcanza para marcar 20 m de línea de una cancha de futbol. De acuerdo a la figura, ¿cuántos kilos de cal se necesitan para marcar todas las líneas de la cancha como se muestra?

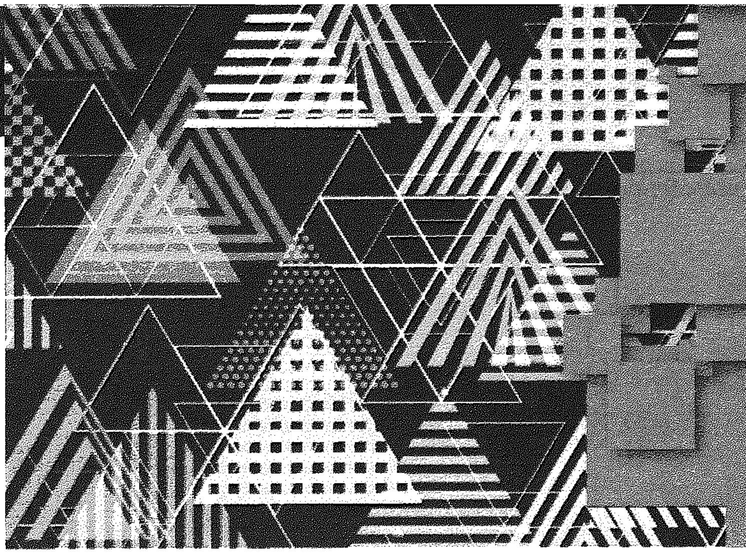


Cuadratura del círculo

Se denomina cuadratura del círculo al irresoluble problema geométrico consistente en hallar con sólo regla y compás, un cuadrado cuya área es igual a la de un círculo dado. Éste es un ejemplo de cómo un problema geométrico puede desembocar en una solución teórica y algebraica, al contrario de lo que ocurre usualmente: resolver un problema teórico de manera geométrica.

La solución del problema está asociada al concepto de número trascendente, en especifico, al hecho de que la raíz cuadrada de π es un número trascendente.





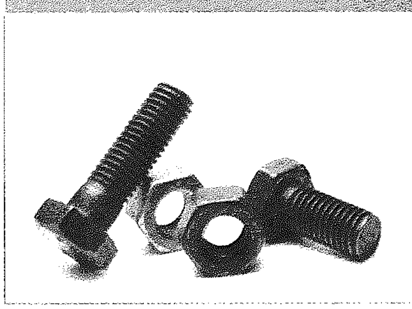
Criterios de congruencia de triángulos

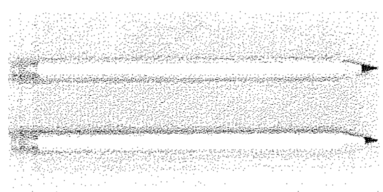
¿Qué tipo de configuraciones figurales se precisan para tratar con polígonos, sus propiedades y estructuras, relaciones y transformaciones?

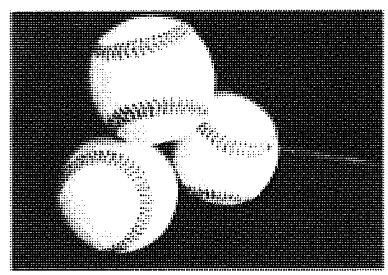
Congruencia de triángulos

Empezaremos esta sección con el concepto de congruencia. Decimos que dos objetos son congruentes si son exactamente el mismo pero en diferente posición. Por ejemplo, dos tuercas idénticas, dos lápices, dos pelotas, etcétera.

Figuras congruentes







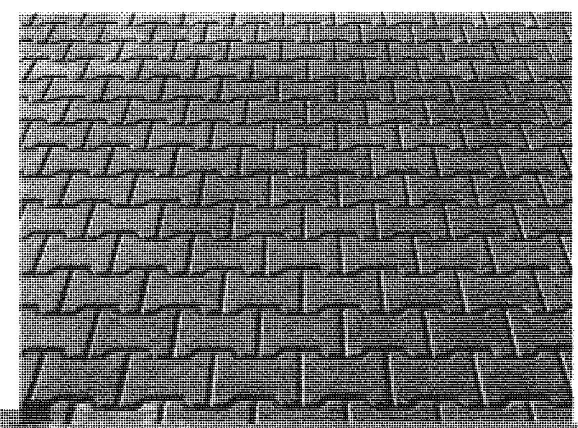


Figura 2.12

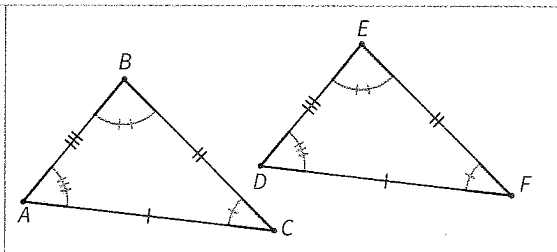
Las personas dedicadas a fabricar adoquines deben tener conocimientos de figuras congruentes.

Visualmente puede resultar fácil decidir si dos objetos son congruentes, basta compararlos uno al lado del otro y ver si coinciden. En la práctica esto puede tener muchas complicaciones, por ejemplo, ¿cómo le haces si quieres saber si dos aviones tienen el mismo fuselaje? Habría que efectuar muchas mediciones de longitudes y ángulos.

Con este ejemplo del avión, nos damos cuenta que necesitamos ciertos criterios para decidir si dos figuras son congruentes a partir de sólo medidas. En general, dependiendo de la figura, esto puede ser tedioso y complicado, por esta razón estudiaremos primero los criterios de congruencia para las figuras más sencillas: los triángulos.

Decimos que dos triángulos son **congruentes** si son exactamente el mismo triángulo pero en diferente posición.

Escribimos $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, para decir que el triángulo *ABC* y el triángulo *DEF* son congruentes.



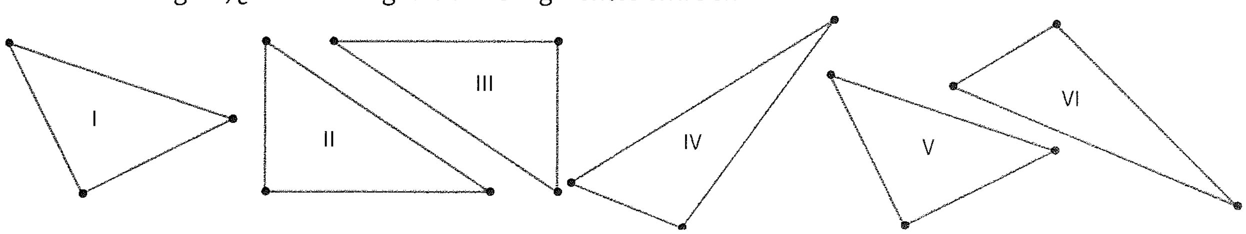
Para verificar que dos triángulos son congruentes habría que hacer ¡12 mediciones! Esto es, habría que medir los lados y los ángulos de ambos triángulos y verificar que hay parejas correspondientes que miden lo mismo. Por ejemplo, en la figura tenemos estas igualdades de pares de segmentos: $AB = ED$, $BC = EF$, $AC = DF$; al igual que las siguientes igualdades de pares de ángulos $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ y $\angle CAB = \angle FDE$. Como puedes darte cuenta, en el dibujo colocamos algunas marcas que señalan cuáles lados y ángulos son iguales.

Afortunadamente, como veremos en la siguiente sección, podemos ahorrarnos la mitad del trabajo debido a los tres criterios de congruencia.

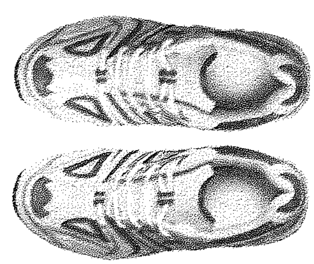
Actividad de aprendizaje 13

Con base en la definición de triángulos congruentes responde lo que se pide.

1. En la figura, ¿cuáles triángulos son congruentes entre sí?



2. Responde las preguntas.
   a. Si dos lados de un triángulo son iguales a dos lados de otro triángulo, ¿puedes garantizar que los lados restantes son iguales?
   b. Si además de los dos lados iguales, los ángulos comprendidos entre ellos son iguales, ¿puedes garantizar que los lados restantes son iguales?
   c. ¿Puedes construir un triángulo con las mismas medidas de los lados de otro, pero no idénticos?
   d. Si dos triángulos son congruentes y uno tercero es congruente a uno de ellos, ¿es congruente con el otro?
   e. Si dos triángulos están en espejo, ¿son congruentes?
3. Un par de zapatos, ¿son congruentes entre sí?
4. Divide la figura 2.13 en cinco triángulos congruentes.



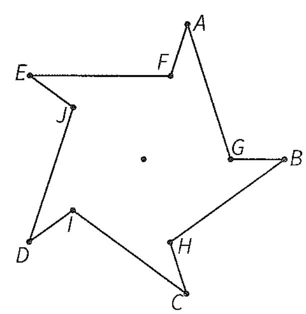


Figura 2.13

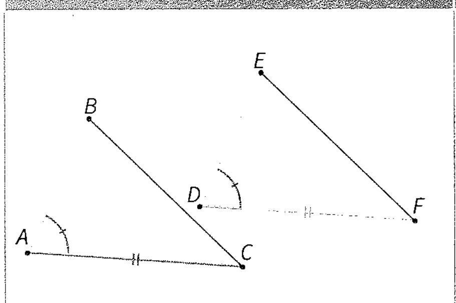
Criterios de congruencia de triángulos

Como mencionamos, existen tres criterios que nos ayudan a verificar cuándo dos triángulos son congruentes:

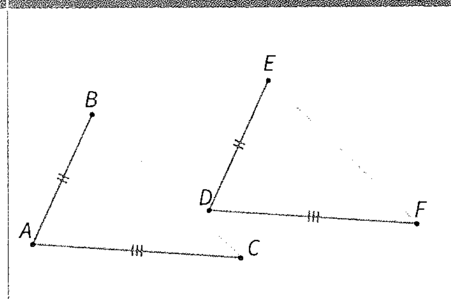
1. **Criterio LAL**. Si dos triángulos tienen dos pares de lados iguales y los ángulos comprendidos entre estos lados también son iguales, entonces los triángulos son congruentes.
2. **Criterio LLL**. Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes.
3. **Criterio ALA**. Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos iguales y el lado comprendido entre estos ángulos también igual, entonces son congruentes.

En las figuras se observan parejas de triángulos congruentes que ilustran los datos que necesitamos para cada uno de los criterios de congruencia. Segmentos y ángulos iguales están señalados con marcas iguales; lados punteados y ángulos no marcados son datos desconocidos.

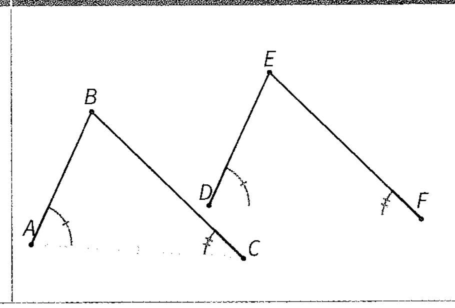
Criterio LAL



Criterio LLL



Criterio LAL



Otra forma de pensar acerca de los criterios de congruencia es haciéndose la pregunta: ¿en qué grado ciertas medidas de un triángulo determinan por completo su forma? O dicho de otra manera, ¿qué información necesito para dibujar una copia de un triángulo dado?

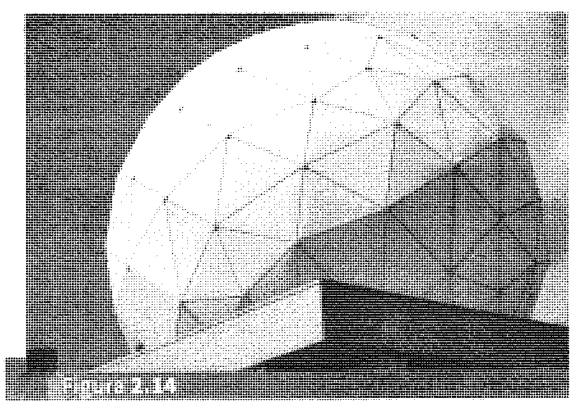


Figura 2.14

Una geodésica consta de triángulos equiláteros congruentes.

La respuesta es precisamente los tres criterios mencionados. Es decir, para dibujar una copia exacta de un triángulo necesitamos ya sea:

1. La medida de dos lados y el ángulo entre ellos, o
2. Las medidas de los tres lados, o
3. La medida de dos ángulos y el lado entre ellos.

Por otro lado, también puedes preguntarte por qué no existe un criterio AAL o uno AAA, es decir, ¿puedes construir dos triángulos con dos ángulos y un lado iguales, en ese orden, pero que no sean congruentes? ¿Puedes construir dos triángulos con ángulos iguales y que no sean congruentes. Ve pensando un argumento pues será parte de una de las actividades siguientes. Por lo pronto veamos unos ejemplos de cómo se aplican los criterios de congruencia.

Veamos unos ejemplos de cómo se aplican los criterios de congruencia.

Ejemplo

En la figura 2.15 se muestra un triángulo isósceles ABC y M es el punto medio de BC. Demuestra que el segmento AM es perpendicular a BC y que $\angle BAM = \angle CAM$.

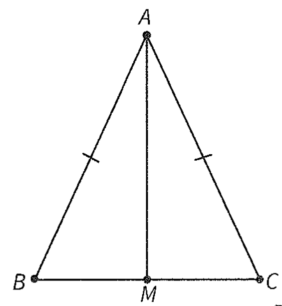


Figura 2.15

Para esto vamos a demostrar que los triángulos ABM y ACM son congruentes usando el criterio LLL.

Primero, $AB = AC$, ya que el triángulo ABC es isósceles.

Luego $BM = CM$, ya que M es punto medio de BC. También el lado AM es común a ambos triángulos.

Por lo tanto, por el criterio LLL, los dos triángulos ABM y ACM son congruentes. De aquí podemos concluir que los ángulos correspondientes son iguales, esto es:

$$\angle ABM = \angle ACM,\ \angle BAM = \angle CAM \text{ y } \angle BMA = \angle CMA.$$

Entonces AM parte al ángulo BAC en dos ángulos iguales. Además, como $\angle BMA + \angle CMA = 180°$ y esos ángulos son iguales, entonces $\angle BMA = \angle CMA = 90°$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

Considera un triángulo ABC, hacia afuera se dibujan los triángulos equiláteros PAB y QAC como se muestra en la figura 2.16. Demuestra que los segmentos PC y BQ son iguales.

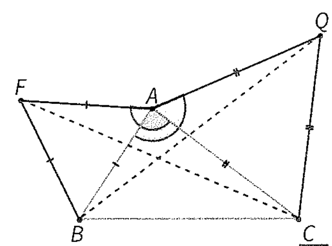


Figura 2.16

Para esto, vamos a demostrar que los triángulos PAC y BAQ son congruentes usando el criterio LAL.

Primero, como el triángulo PAB es equilátero, tenemos que el lado AP del triángulo PAC es igual al lado AB del triángulo BAQ.

Luego, el ángulo PAC es la suma de $\angle PAB$ y $\angle BAC$, pero $\angle PAB = 60°$ pues pertenece a un triángulo equilátero, así que $\angle PAC = 60° + \angle BAC$. De la misma manera $\angle BAQ = \angle BAC + 60°$. Por tanto, $\angle PAC = \angle BAQ$.

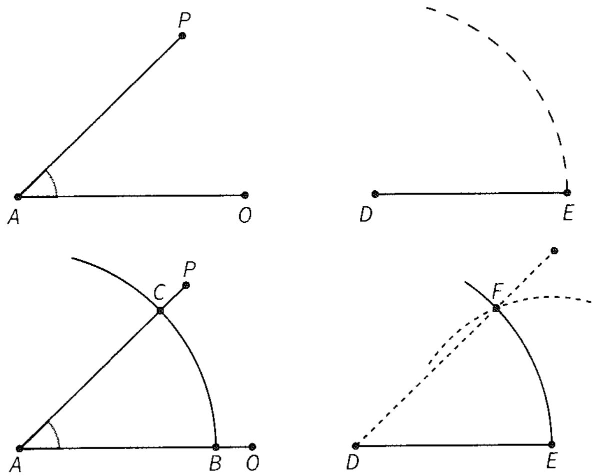
También, el lado AC del triángulo PAC es igual al lado AQ del triángulo BAQ.

Por lo tanto, podemos aplicar el criterio LAL para los triángulos PAC y BAQ y concluir que son congruentes. Finalmente, como son triángulos congruentes, entonces, el par de lados que no hemos considerado también deben ser iguales, de aquí que PC y BQ son iguales.

Estos dos ejemplos ilustran la utilidad de los criterios de congruencia: Con datos parciales pudimos concluir la congruencia de dos triángulos y a partir de esto explotamos la congruencia de los triángulos para deducir igualdades de ángulos o segmentos que en un principio no teníamos.

Ejemplo

Copiar un ángulo usando regla y compás: dado el ángulo que se observa en la figura, copiarlo sobre el segmento *DE*.



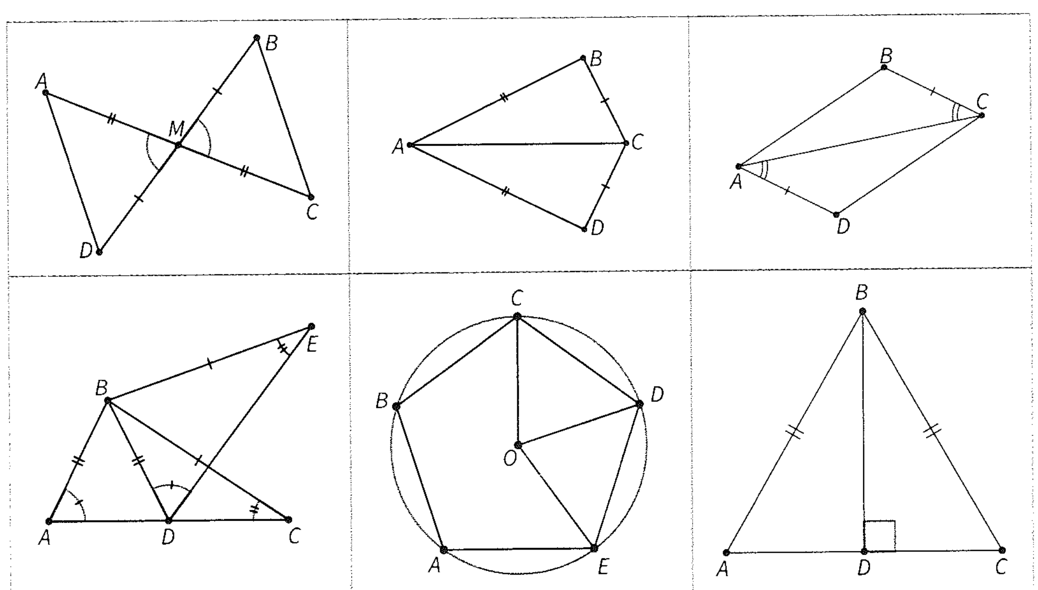
Vamos a seguir estos pasos:

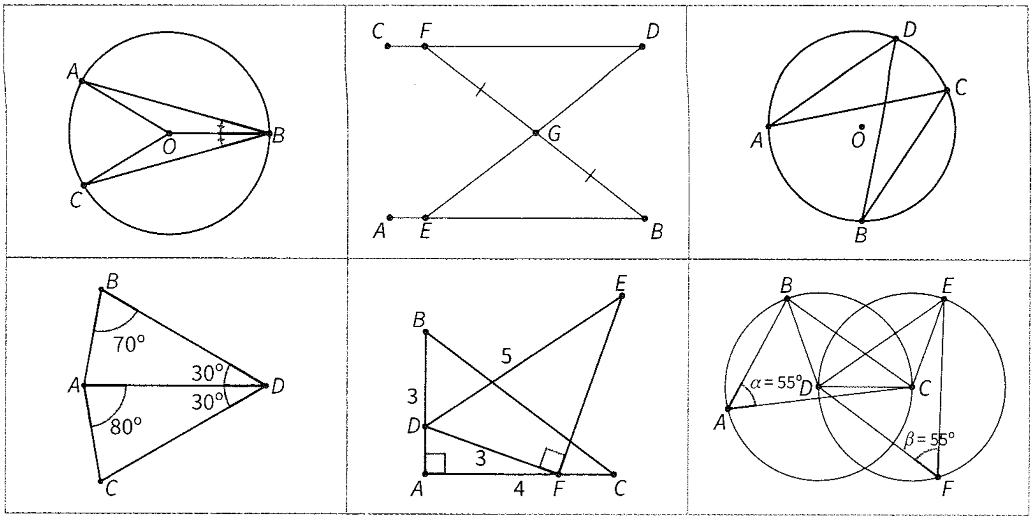
1. Usa el compás para trazar un arco pequeño con centro en *D* y radio *DE*.
2. Con la misma abertura pero ahora con centro en *A*, traza un arco que corte a los lados del ángulo dado. Las intersecciones de este círculo con los lados son los puntos *B* y *C* que se muestran en la figura de abajo.
3. Ahora abre el compás de manera que sus puntas coincidan con *B* y *C*, con esta abertura pero con centro en *E*, traza un arco que corte al arco del paso 1 que marcaste. Llama *F* al punto de intersección.
4. ¡Listo! Traza la línea *DF*. El ángulo *EDF* es igual al ángulo *BAC*.

Actividad de aprendizaje 14

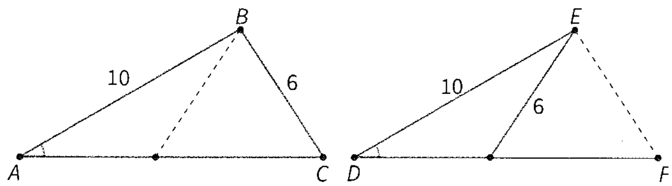
- **Recuerda la definición de triángulos congruentes y los criterios que los caracterizan para responder los preguntas.**

1. Usa el criterio LLL para demostrar que la construcción para copiar un ángulo dado en un segmento dado en verdad cumple el objetivo.
2. En estas figuras los segmentos y ángulos iguales están señalados con marcas iguales. Para cada una demuestra que los triángulos señalados son congruentes así como el criterio que utilizaste.





3. Con las congruencias que estableciste, ¿qué nueva información acerca de igualdad de ángulos o segmentos puedes deducir?
4. Usa la figura como ejemplo para explicar por qué no hay un criterio de congruencia ALL.



Congruencia de polígonos

De la misma manera que antes, decimos que dos polígonos son congruentes si son exactamente el mismo polígono pero en diferente posición.

Usaremos este concepto para explorar un poco la pregunta: ¿en qué grado ciertas medidas de un polígono determinan su forma?

Empecemos con cuadriláteros. A partir de cuatro lados se vuelve tedioso y poco práctico enunciar criterios de semejanza, ya que son muy variados. Aquí vamos a incluir nada más uno a manera de ejemplo.

Criterio ALALA. Si dos cuadriláteros tienen tres pares de ángulos iguales y los pares de lados comprendidos entre ellos iguales, entonces son congruentes.

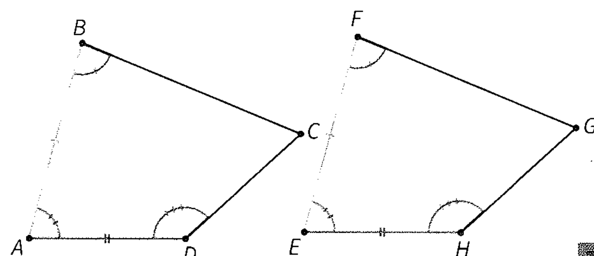


Figura 2.17

¿Puedes describir un criterio similar para pentágonos? ¿Y para hexágonos?

En las siguientes actividades veremos que no basta con saber las medidas de todos los lados para decir que dos cuadriláteros son congruentes.

Actividad de aprendizaje 15

La fórmula de Herón dice que el área de un triángulo es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son las medidas de los lados y

$$s = (a+b+c)/2$$

es el semiperímetro.

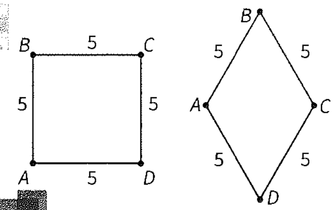


Figura 2.18

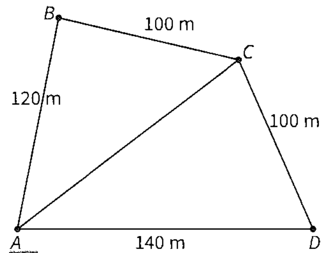


Figura 2.19

Emplea lo aprendido de congruencia de cuadriláteros para responder lo siguiente. Anota las respuestas en tu cuaderno.

1. Usa la figura 2.18 para explicar por qué no existe un criterio LLLL para congruencia de cuadriláteros.
2. El señor Pérez te pide ayuda para calcular el área de su terreno, para ello te muestra el dibujo de la figura 2.19.
   a. Explica por qué con los datos que se dan no se puede saber con seguridad el área del terreno.
   b. En otra visita, el señor Pérez te dice que la diagonal marcada mide 160 m. Usa la fórmula de Herón para calcular ahora sí el área del terreno.
3. En tu cuaderno dibuja un cuadrilátero y genera un algoritmo para trazar otro congruente. ¿Qué garantiza que son congruentes?

Isometrías

Ahora cambiaremos de punto de vista, en lugar de medir figuras, vamos a moverlas.

Imagina que tienes dos recortes de figuras sobre una mesa. ¿Cómo le haces para saber si son congruentes? En este caso podemos mover los recortes, luego, basta ponerlos uno sobre el otro y ver si coinciden.

Formalmente, a los movimientos que le hacemos a un recorte sobre la mesa les llamamos transformaciones rígidas o **isometrías**, ya que preservan las distancias y los ángulos.

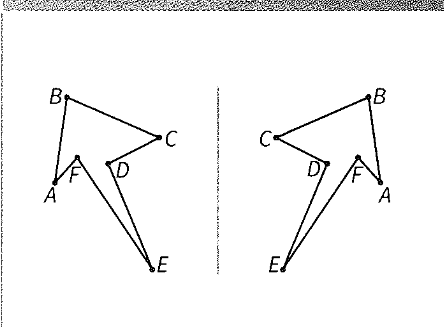
Glosario

Isometría.

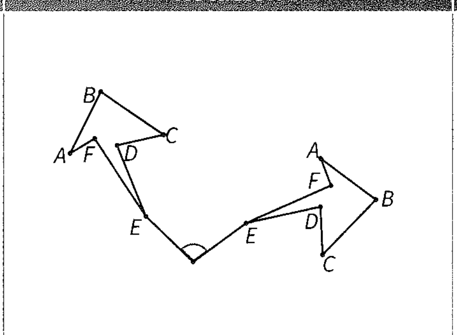
Del griego iso, misma y metría, medida.

Las isometrías en el plano pueden clasificarse a partir de tres tipos básicos: reflexiones, rotaciones y traslaciones. Cualquier otro tipo de isometría es una combinación de estas tres. Estas figuras describen de qué trata cada una.

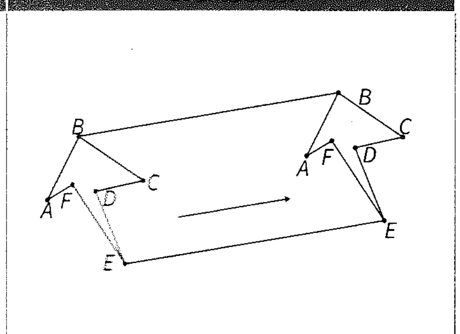
Reflexión



Rotación



Traslación



La reflexión consiste en copiar lo que está de un lado de la línea al otro lado, de manera que todo se "voltea" como se observa en la figura. Puedes imaginar que la línea recta es un espejo y una figura es el reflejo de la otra.

Para hacer una rotación necesitamos elegir un punto en el plano y un ángulo. Luego, cualquier figura en el plano la rotamos con respecto al punto elegido y el ángulo correspondiente como se observa en la figura.

Por último, la traslación sólo es el movimiento en una dirección y a una distancia predeterminadas.

TIC

En esta página puedes jugar con reflexiones, rotaciones y traslaciones.

http://bkmrt.com/4V5CnJ

Ejemplo

Considera un triángulo ABC, hacia afuera se dibujan los triángulos equiláteros PAB y QAC como se muestra en la figura 2.20. Demuestra que los segmentos PC y BQ son iguales.

Este ejemplo ya lo trabajamos en la sección de congruencia de triángulos, pero ahora lo vamos a ver desde el punto de vista de isometrías. En particular, veremos que pensar en términos de rotaciones nos va a ayudar.

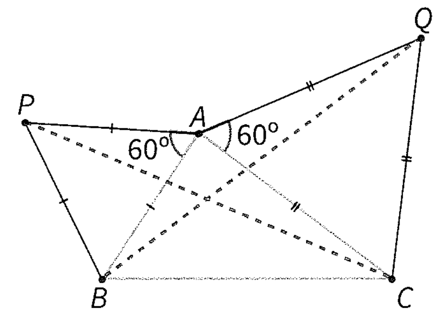


Figura 2.20

Veremos cuál es el efecto de hacer una rotación de 60° alrededor del punto A.

Primero, observamos que el punto P al rotarlo se mueve a donde está el punto B. De la misma manera, el punto C se mueve a donde está el punto Q.

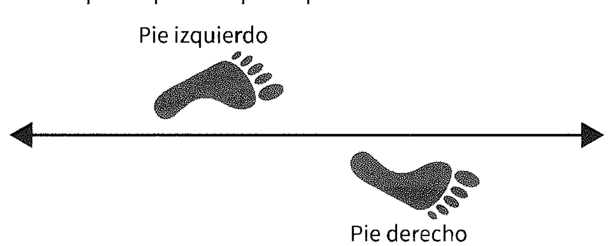
Entonces podemos concluir que el segmento PC al rotarlo se va a mover al segmento BQ, y como la rotación preserva las distancias, entonces, el segmento PC es igual al segmento BQ.

Te invito a que corrobores todo esto usando tu transportador.

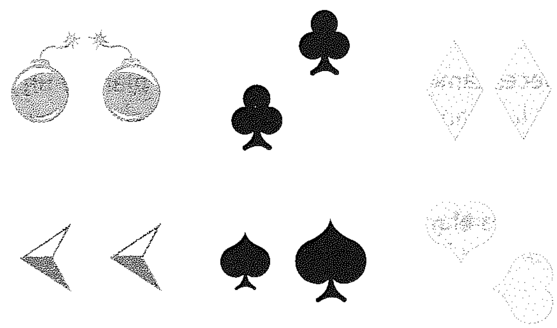
Actividad de aprendizaje 16

Emplea lo aprendido de isometrías para responder lo siguiente. Anota las respuestas en tu cuaderno.

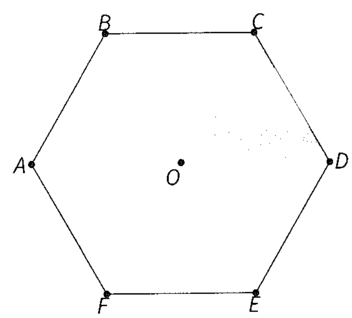
1. Indica cómo, a través de una combinación de reflexión y traslación, se puede mover la huella del pie izquierdo para que coincida con la huella del pie derecho.



2. Indica qué tipo de isometría se ha efectuado en cada una de las parejas de figuras. ¡Cuidado! Hay una que no es isometría, indica cuál es.



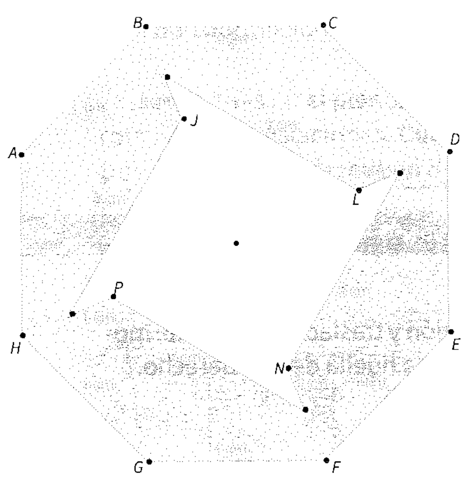
3. Dibuja la figura que se obtiene al rotar el área sombreada un ángulo de 60° alrededor del punto O. Repite este proceso hasta llenar todo el hexágono.



Actividad de aprendizaje 17

Productos esperados

Copia la imagen siguiente en hojas sueltas y desarrolla la actividad, considerando los datos de la figura. Guarda tu trabajo como evidencia de tu aprendizaje.



- El polígono es un octágono regular de cuatro unidades de lado.
- La distancia entre extremos de la estrella es de ocho unidades.

1. Halla las medidas siguientes.
   a. El radio del octágono.
   b. La apotema del octágono.
   c. El perímetro del octágono.
   d. El área de la región blanca.
2. Utiliza las medidas halladas para calcular el área de la región sombreada.

Congruencia o semejanza

El tratamiento de la reducción y la copia. Figuras iguales y figuras proporcionales

Cuando hacemos un dibujo en papel muchas veces tenemos que recurrir a la escala, por ejemplo, al dibujar un perro o al hacer el plano de una casa. Obviamente un dibujo a tamaño real no cabe en el papel, así que lo hacemos más pequeño; el tamaño en sí no importa, lo que sí es importante es mantener la misma proporción para todas las partes. En Matemáticas a este concepto se le llama semejanza; más precisamente, decimos que dos figuras son **semejantes** si son la misma pero en diferente posición y en diferente escala.

Figura 2.21

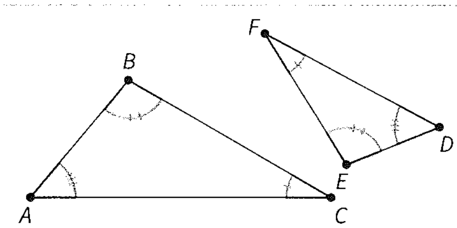
Al igual que en el tema anterior, estudiaremos primero la semejanza de triángulos, ya que son las figuras más simples.

Semejanza de triángulos

Como viste anteriormente si dos triángulos coinciden en sus ángulos no significa que sean iguales, sin embargo esta característica no debe despreciarse, como verás a continuación.

Decimos que dos triángulos son *semejantes* si son exactamente el mismo triángulo pero en diferente posición y en diferente escala.

Escribimos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, para decir que el triángulo ABC y el triángulo DEF son semejantes.



Al igual que con triángulos congruentes, para verificar que dos triángulos son semejantes, habría que hacer 12 mediciones. Esto es, habría que medir los ángulos y verificar que las parejas correspondientes miden lo mismo, en la figura se tienen estas igualdades de ángulos:

$$\angle ABC = \angle DEF,\ \angle BCA = \angle EFD \text{ y } \angle CAB = \angle FDE.$$

De la misma manera habría que medir los tres lados de cada triángulo y verificar que son proporcionales. Es decir, contrario a la congruencia, las parejas de lado ya no medirían lo mismo pero sí tendrían que mantener la misma proporción. En otras palabras, se debe tener la siguiente igualdad de proporciones:

$$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\text{razón de semejanza.}$$

La razón de semejanza es precisamente el factor de escala y se puede interpretar geométricamente como qué tan chico (o grande) es el triángulo *DEF con respecto al triángulo ABC.*

Al igual que con la congruencia, para la semejanza también tenemos criterios que nos ahorran el trabajo de verificar todas las condiciones anteriores. Estos criterios los veremos en la siguiente sección. Primero veamos un ejemplo de cómo se aplica la semejanza.

Ejemplo

En la figura 2.22, el triángulo chico es semejante al grande. ¿Cuánto mide el segmento marcado con la letra *x*?

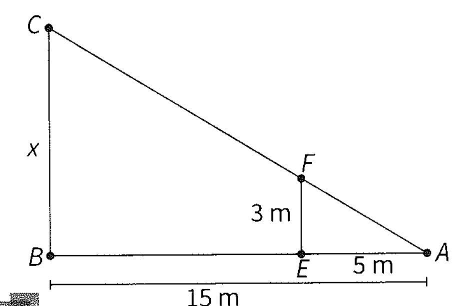


Figura 2.22

Primero, los triángulos semejantes son $\Delta ABC \sim \Delta AEF$.

Ahora calculamos la razón de semejanza. En este caso, los lados que nos interesan son:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EF}.$$

Como nos dicen que *AB* mide 15 m y *AE* mide 5 m, entonces, la razón de semejanza es 15:5 = 3:1 o simplemente 3. Es decir, los lados del triángulo grande son tres veces más grandes que los lados del triángulo chico.

Con esta observación, podemos calcular *x*; *BC* y *EF* tienen que estar en la misma proporción de semejanza, esto es $x/3 = 3$, o en palabras, *x* debe medir tres veces más que el lado correspondiente que mide 3 m. Por tanto, $x = 9$ m.

Actividad de aprendizaje 18

Con base en la definición de triángulos semejantes responde lo siguiente.

1. Responde las preguntas.
   a. ¿Puedes construir un triángulo con ángulos iguales a los de otro, pero que no sean semejantes?
   b. Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos de otro triángulo, ¿puedes asegurar que los lados restantes también son proporcionales?
   c. Si además los ángulos son iguales, ¿puedes asegurar que los triángulos son semejantes?

2. En la figura 2.23 se observan dos triángulos semejantes. Indica la razón de semejanza y úsala para calcular la medida del lado que falta.
3. En las figuras se tienen triángulos semejantes, halla la razón de semejanza y encuentra los valores señalados con las letras *x* y *y*.

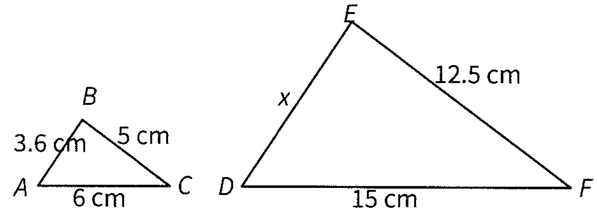
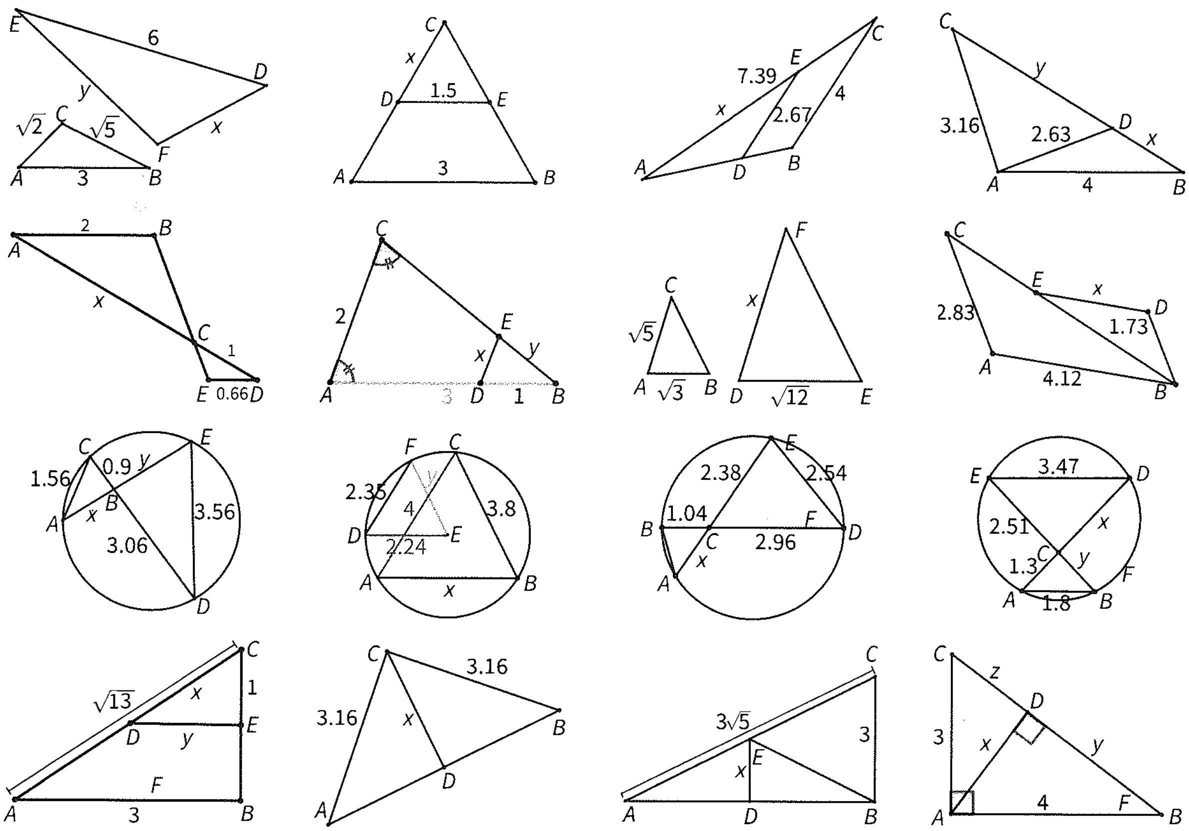


Figura 2.23

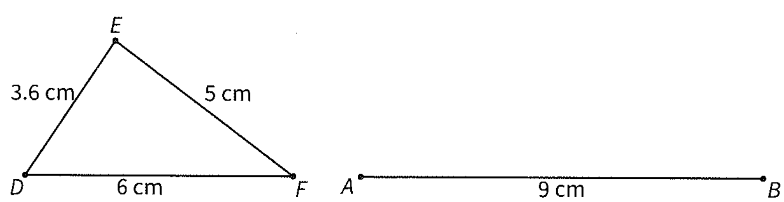


Actividad de aprendizaje 19

Productos esperados

Copia la imagen siguiente en hojas sueltas y resuelve el ejercicio. Guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

1. Dibuja un triángulo semejante al que se da, de manera que el lado más grande coincida con el segmento *AB*. ¿Cuál es la razón de semejanza?

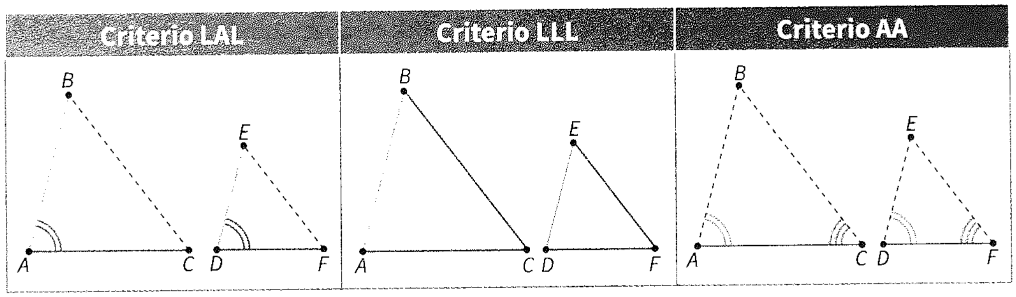


Criterios de semejanza de triángulos

De manera similar a los criterios de congruencia también contamos con tres criterios que nos ayudan a verificar cuando dos triángulos son semejantes:

1. **Criterio LAL**. Si dos triángulos tienen dos pares de lados a la misma proporción y el ángulo comprendido entre estos lados igual al correspondiente, entonces los triángulos son semejantes.
2. **Criterio LLL**. Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes a la misma proporción, entonces son semejantes.
3. **Criterio AA**. Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos iguales, entonces son semejantes.

En la siguiente figura se observan parejas de triángulos semejantes que ilustran los datos que necesitamos para cada uno de los criterios de semejanza.



Ejemplo

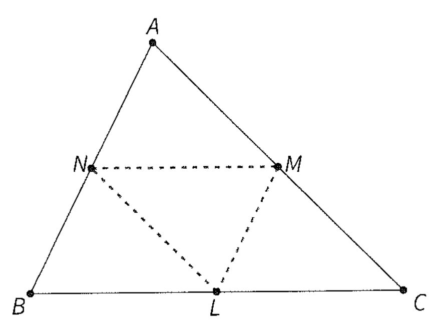


Figura 2.24

Considera un triángulo ABC y sean L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB como se muestra en la figura 2.24. Demuestra que NM es la mitad de BC, LM es la mitad de AB y LN es la mitad de AC. Además, los segmentos LM, MN y NL dividen al triángulo ABC en cuatro triángulos pequeños semejantes a él en razón 1/2.

Demostremos primero que el triángulo ANM es semejante al triángulo ABC usando el criterio LAL.

Para esto observamos que:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2},$$

pues N y M son puntos medios de AB y AC, respectivamente. Además, el ángulo NAM es igual a $\angle BAC$ ya que es común a ambos triángulos. Por lo tanto, por el criterio LAL, los triángulos ANM y ABC son semejantes en razón 1/2.

De aquí que el tercer lado también debe guardar la misma proporción, es decir, *NM* mide la mitad de *BC*.

De manera similar se deducen las semejanzas de *LMC* y *NLB* con *ABC* y se concluye que *LN* mide la mitad de *AC* y *LM* mide la mitad de *AB*.

Falta nada más demostrar que el triángulo *LMN* es semejante a *ABC*. Esto lo podemos hacer usando el criterio LLL de semejanza, ya que, por lo demostrado anteriormente, tenemos que:

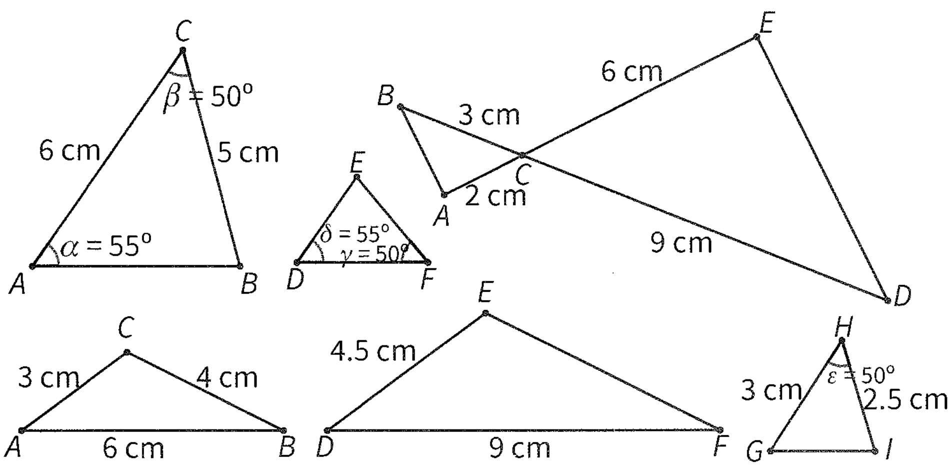
$$\frac{NM}{BC}=\frac{LM}{AB}=\frac{LN}{AC}=\frac{1}{2}.$$

Entonces, por el criterio LLL, los triángulos *LMN* y *ABC* son semejantes en razón 1/2.

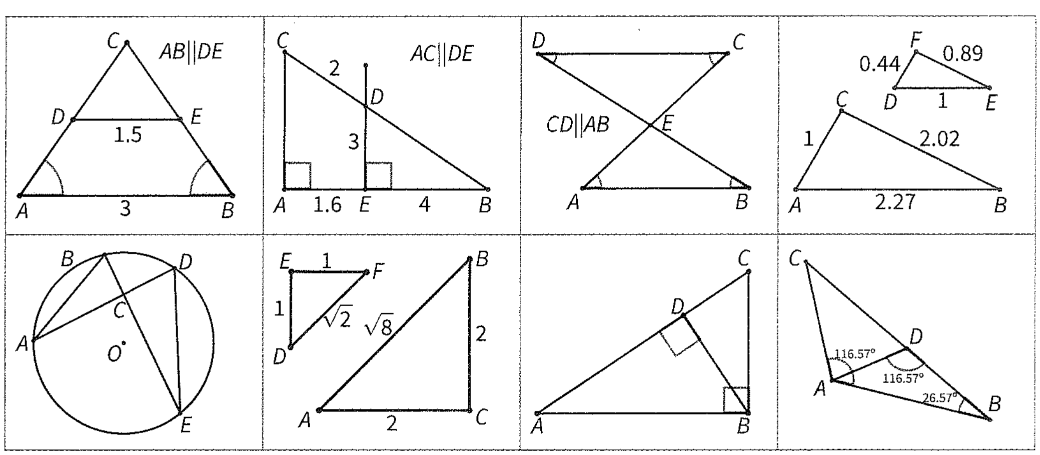
Actividad de aprendizaje 20

Repasa lo visto en el tema con los ejercicios.

1. En las figuras indica cuáles triángulos son semejantes y qué criterio utilizaste para llegar a esa conclusión.



2. Argumenta por qué cada pareja muestra triángulos semejantes.



Semejanza de polígonos

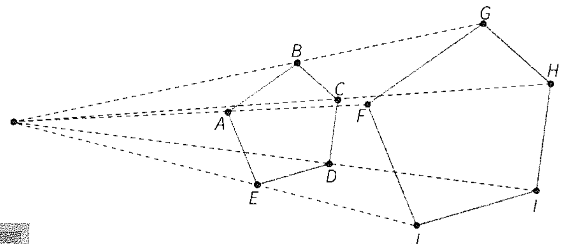


Figura 2.25

Decimos que dos polígonos son semejantes si están a escala. Al igual que con los triángulos, para los polígonos requerimos que los ángulos correspondientes sean iguales y que los lados correspondientes estén todos en la misma proporción. A la proporción que guardan los lados le seguimos llamando razón de semejanza.

En la figura 2.25 se observan dos pentágonos semejantes en razón 2.5, es decir, el pentágono de la derecha es 2.5 veces más grande que el de la izquierda. Puedes verificar esto midiendo los segmentos.

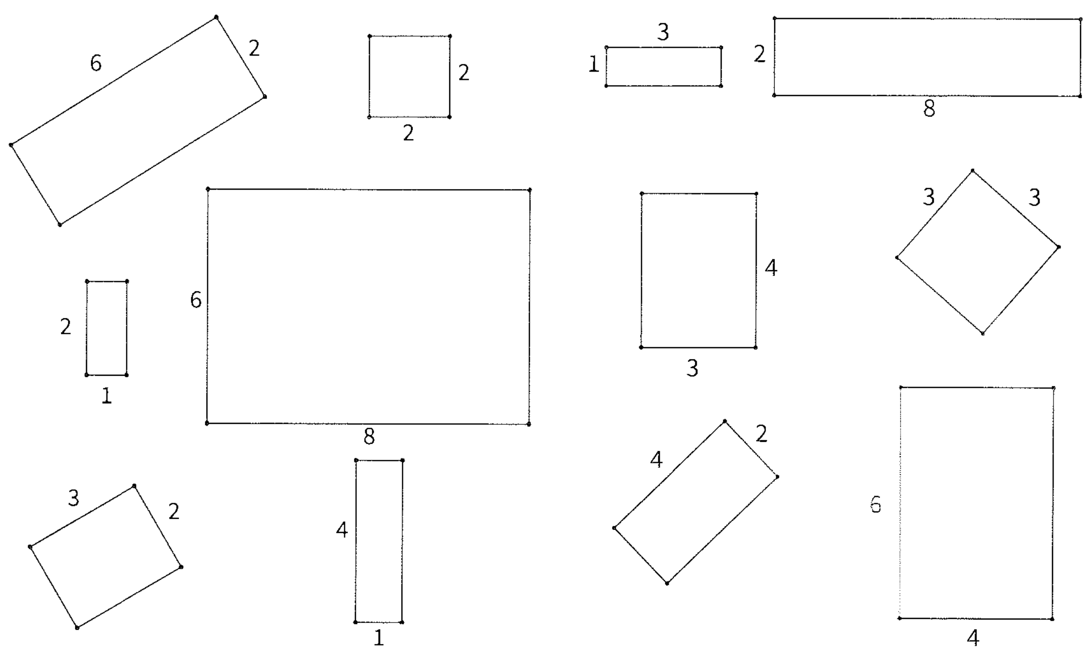
De nuevo los criterios de semejanza para polígonos son tediosos y poco prácticos. En el caso de los cuadriláteros tenemos un **criterio ALALA** análogo al de congruencia de cuadriláteros. Sin embargo, aquí vamos a poner atención sólo en rectángulos semejantes.

Recuerda que en un rectángulo los cuatro ángulos son de 90°, así que cualesquiera dos rectángulos satisfacen que sus ángulos correspondientes son iguales. Sin embargo, no todos los rectángulos son semejantes, para esto se necesita además que los lados estén a la misma proporción.

Actividad de aprendizaje 21

Con base en lo estudiado contesta lo siguiente.

1. Relaciona cada figura de la izquierda con la figura semejante de la derecha. Para cada pareja indica cuál es la razón de semejanza.



Escalas

Practiquemos con varios ejercicios de escalas. Pero primero, recordemos que una forma común de representar escalas es:

$$2:5.$$

Esto significa que si un segmento mide 2 en una figura, el mismo segmento correspondiente en la figura semejante va a medir 5. En términos de razón de semejanza decimos que la escala 2:5 corresponde a una razón de semejanza de 2/5 = 0.4.

En la figura 2.26 podemos observar dos gatos a escala. A simple vista es difícil determinar la escala, pero si hacemos las mediciones correspondientes se vuelve directo.

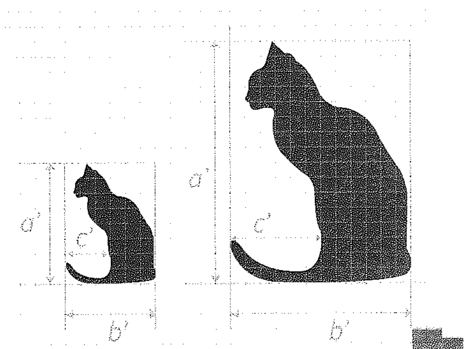


Figura 2.26

Por ejemplo, la altura del gato de la izquierda es 8 mientras que la del gato de la derecha es 16. De aquí que la escala es 8:16 o 1:2.

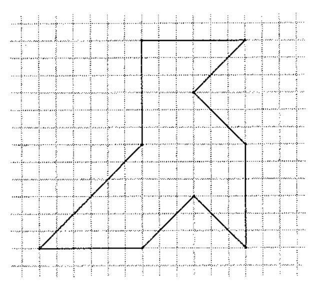
Esto lo podemos corroborar al medir la cola, que corresponde a los segmentos *b* y *b'*. En el de la izquierda *b* = 6 y en la derecha *b'* = 12. Aquí también la escala es 6:12 o lo que es lo mismo 1:2.

De la misma manera, *c* y *c'* están en razón 3:6 o 1:2.

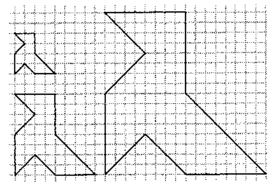
Actividad de aprendizaje 22

Con base en lo estudiado contesta lo siguiente.

1. Reduce esta figura en una escala de 1:3.



2. Encuentra la razón de escala entre las siguientes figuras.



3. Calcula el área de cada una de las figuras anteriores. ¿Qué observas al comparar la razón de semejanza con la proporción de las áreas?

Teorema de Tales y semejanza de triángulos

Ahora veamos cómo se relacionan los conceptos de proporción de segmentos con líneas paralelas.

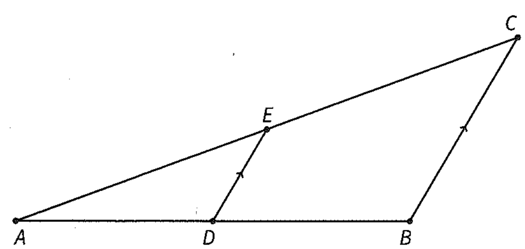


Figura 2.27

Si en la figura 2.27 los segmentos DE y BC son paralelos, entonces, dividen a los segmentos AB y AC en proporciones iguales, es decir:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

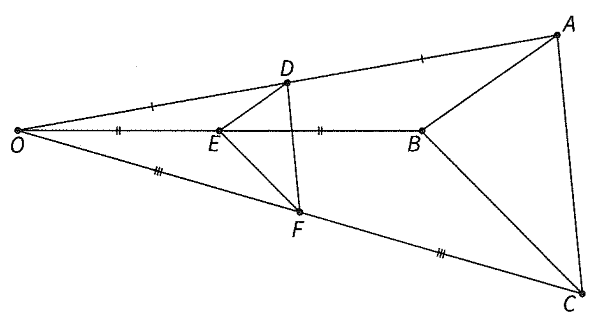
Y viceversa. Si se cumple esta igualdad de proporciones, entonces, los segmentos DE y BC son paralelos.

Este resultado se conoce como Teorema de Tales y su utilidad se basa precisamente en poder pasar de proporciones de segmentos a rectas paralelas y viceversa. Vamos a ilustrar esto con un ejemplo.

Ejemplo

Para saber más

A la transformación que manda el triángulo DEF al triángulo ABC se le llama homotecia o dilación con centro O y razón de escala dos.



Considera esta figura donde $OD = DA$, $OE = EB$ y $OF = FC$.

En particular se tiene que:

$$\frac{OD}{DA}=\frac{OE}{EB}=1,$$

entonces, por el Teorema de Tales los segmentos DE y AB son paralelos.

De la misma manera, se obtiene que los segmentos EF y BC son paralelos. Lo mismo ocurre con los segmentos DF y AC. Este tipo de situaciones aparece comúnmente en los dibujos en perspectiva en donde O se conoce como punto de fuga.

Ejemplo

Dividir un segmento en una proporción dada: dado un segmento *AB* dividirlo en razón 1:2.

Sigamos estos pasos:

Dibujar una línea auxiliar que pase por *A*.

Con una abertura constante del compás marcar arcos a lo largo de la línea auxiliar para partir la línea en segmentos iguales. En este caso, con tres segmentos es suficiente. Con esto se logra partir el segmento auxiliar en razón 1:2, es decir $AP/PR = 1/2$.

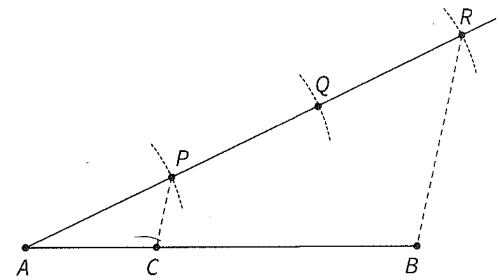


Figura 2.28

Con ayuda de un par de escuadras trazar la paralela a *BR* que pasa por *P*. Llama *C* al punto de corte de esta paralela con el segmento *AB*.

¡Listo! El punto *C* divide al segmento *AB* en razón 1:2.

Estos trazos funcionan debido al Teorema de Tales.

Actividad de aprendizaje 23

Lee atentamente la instrucción y desarrolla la actividad, anotando tus argumentos en tu cuaderno.

1. Divide a un segmento dado *AB* en razón 2:3. En este caso necesitarás un segmento auxiliar dividido en cinco partes iguales.
2. En la figura 2.29 se muestran tres líneas paralelas cortadas por dos transversales. Encuentra las longitudes de los segmentos que faltan.
3. Si a un segmento de 2 cm se le agrega otro de la mitad de su tamaño, ¿cuánto mide el nuevo segmento? ¿Y si en lugar del segmento de la mitad de su longitud se le agrega uno 1.5 veces mayor?
4. Halla el valor de *x*.

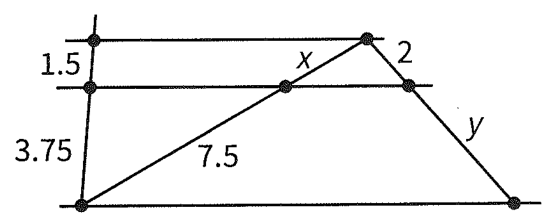
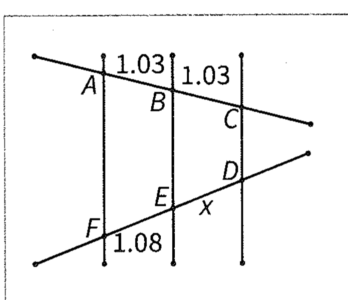
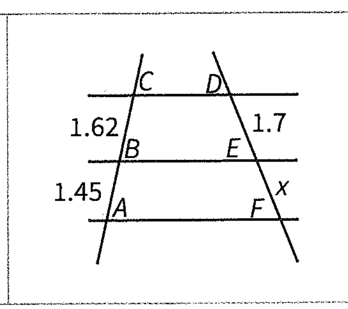
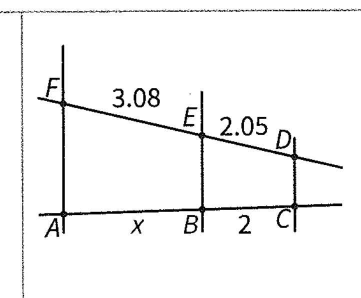


Figura 2.29







¿Cómo surge y en qué situaciones es funcional?

Ya nos familiarizamos con la semejanza y la escala. También vimos cómo sirven para resolver problemas de Matemáticas. Ahora veremos que también tienen aplicaciones prácticas. En esta sección trabajaremos dos ejemplos de cómo aplicar la semejanza para medir distancias que son difíciles de acceder físicamente pero que a través de observaciones y de una planeación ingeniosa se pueden obtener de manera indirecta.

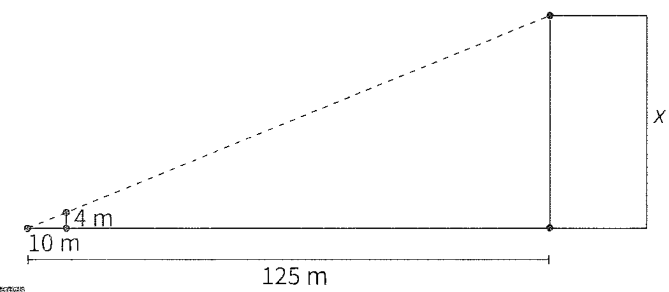


Figura 2.30

Midiendo la altura edificios. Medir la altura de un árbol o de un edificio puede resultar difícil, sobre todo si no se puede acceder a la parte más alta. La figura 2.30 muestra un esquema con una manera de obtener la altura de un edificio si se cuenta con un objeto auxiliar del cual sí se sabe la altura.

Supón que a la distancia hay un poste de luz que sabemos mide 4 m de alto. Una persona se coloca todavía más lejos de manera que en su línea de visión coincidan la punta del poste de luz y el techo del edificio.

Ahora, se procede a medir las distancias entre la persona, el poste de luz y el edificio.

En la figura 2.31 se muestran las medidas obtenidas. Usa semejanza de triángulos para obtener la altura del edificio.

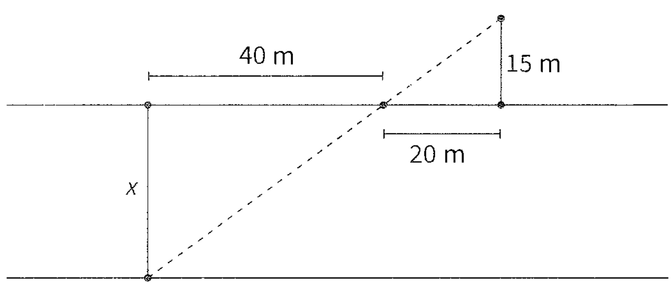


Figura 2.31

Midiendo el ancho de un río. En la figura se muestra un diagrama para medir el ancho de un río usando semejanza. Con las medidas que se dan, ¿cuánto mide el ancho del río?

¿Calculando la altura al medir la sombra?

Ahora veremos otro método para calcular alturas usando sombras.

Vas a necesitar medir la altura de una vara que tengas a la mano.

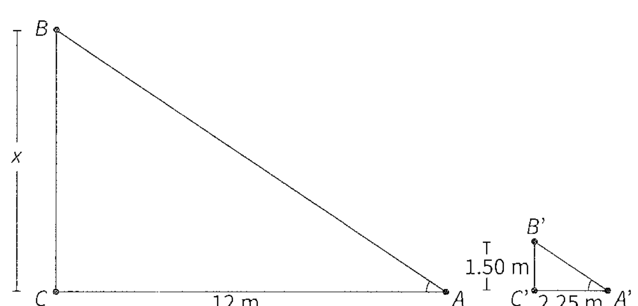


Figura 2.32

1. Mide la altura de la vara. En la figura 2.32 se observa una vara de 1.5 m de alto.
2. Ahora mide las sombras tanto del árbol como de la vara. Para este paso vas a necesitar ser rápido para asegurarte que el sol y las sombras no se muevan mucho mientras haces las mediciones.
3. ¡Listo! Con los datos que obtuviste ya puedes calcular la altura del árbol.

Este método funciona ya que los triángulos que se forman con un objeto y su sombra son todos semejantes sin importar la altura del objeto, siempre y cuando sea a la misma hora.

Entonces, para calcular la altura del árbol basta con calcular primero la razón de semejanza entre las dos sombras y luego aplicar esta proporción para encontrar la altura del árbol de acuerdo a la altura de la vara.

Usa esta idea para calcular la altura del árbol que se observa en la figura 2.32 con los datos que se dan.

Esta idea es fundamental para los arquitectos, y aunque ahora hay software que ayudan con los cálculos, siempre ayudará conocer el origen de los conocimientos.

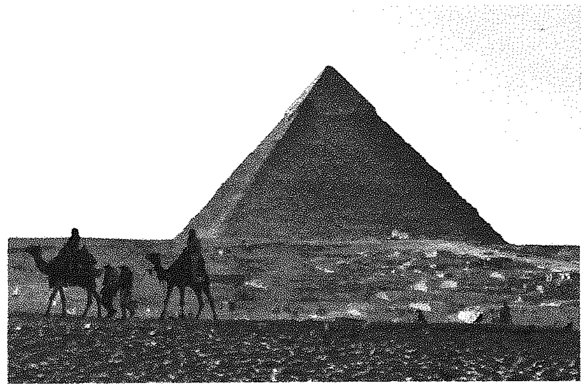


Figura 2.33

Tales de Mileto midió la altura de la pirámide de Keops utilizando la sombra de ésta.

Figuras a escala

Concluimos esta unidad midiendo figuras a escala. Una de las figuras a escala más importante que tenemos son los mapas que siempre vienen con una escala incluida que indica a cuántos kilómetros o metros equivale cierta distancia marcada. El objetivo de este ejercicio es aprender a medir distancias sobre un mapa, así que saca tu regla para medir en el mapa que se muestra y poder contestar las preguntas.

1. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre la Ciudad de México y Mérida?
2. ¿Cuál es la distancia mínima aproximada entre la Ciudad de México y Mérida si no se puede atravesar por el agua?
3. ¿Cuál es la distancia más larga entre dos lugares de México?
4. ¿Cuál es la distancia más corta entre el Océano Pacífico y el Golfo de México?
5. ¿Cuánto crees que tarde un viaje en coche de Tuxtla Gutiérrez a Mexicali?

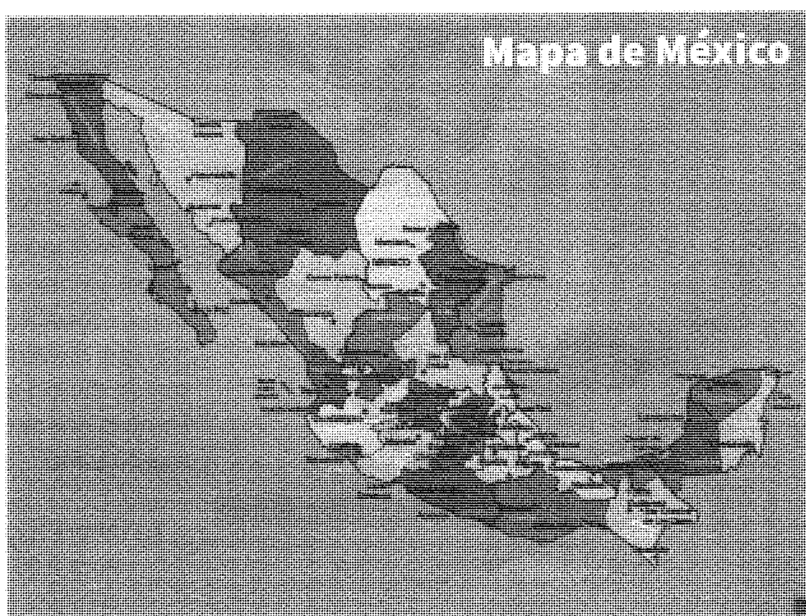


Figura 2.34

División política de México.

CIERRE

Proyecto integrador

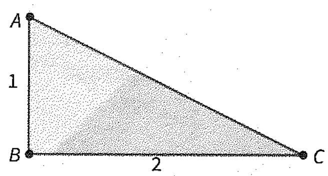


Figura 2.35

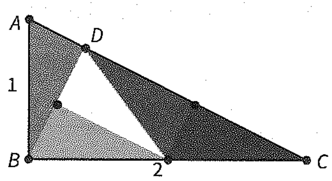


Figura 2.36

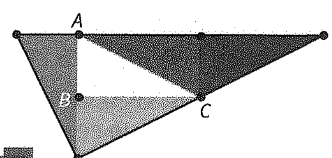


Figura 2.37

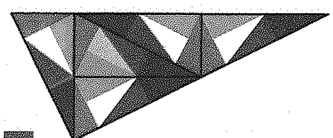


Figura 2.38

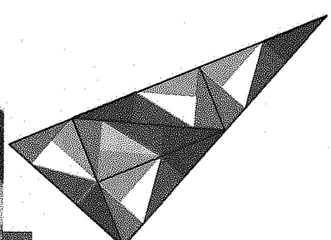
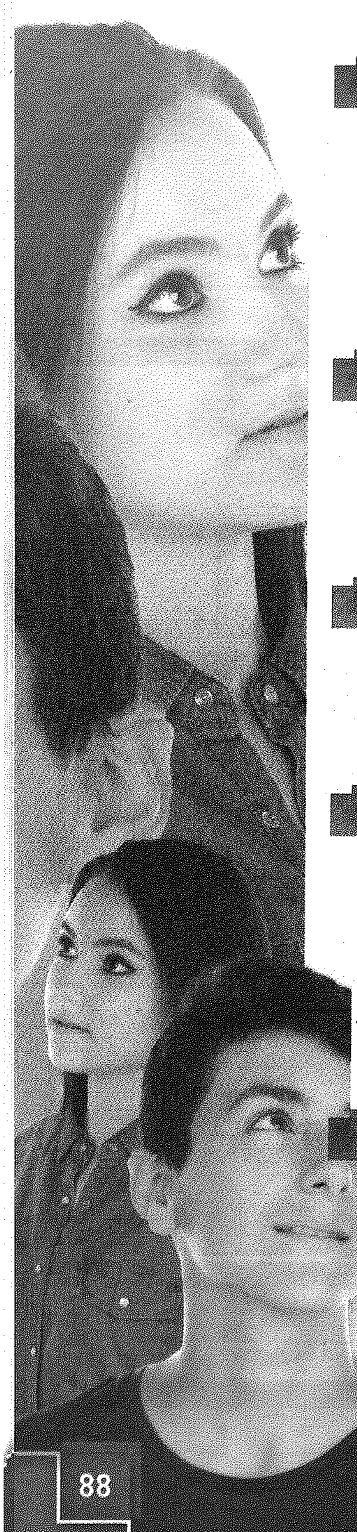


Figura 2.39



El proyecto tiene como objetivo integrar los conocimientos del primer parcial en una actividad. Desarrolla lo que se pide y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

En el segundo parcial estudiamos patrones, congruencia, semejanza y escalas. Usemos todos estos conocimientos para hacer un dibujo conocido como fractal molinillo.

Lee con atención cada inciso y responde lo que se pide.

1. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con catetos 1 y 2 (figura 2.35). Nombra a sus vértices como *ABC*. ¿Cuánto mide la hipotenusa?.
2. En el triangulo que dibujaste marca el punto D sobre *AC* de manera que *BD* sea perpendicular a AC. Muestra que los triángulos *ABC* y *ADB* son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?
3. Marca los puntos medios de *BD*, *DC* y *BC* y úsalos para dividir al triángulo en 5 triángulos más pequeños congruentes entre sí y semejantes al original (figura 2.36). ¿Cuánto miden los lados de los triángulos pequeños?
4. Ahora vas a copiar y agrandar este patrón, es decir, dibuja triángulos congruentes a *ABC* alrededor de él siguiendo el patrón de colores, de manera que el triangulito blanquito del centro corresponda con *ABC*. El resultado se debe ver como la figura 2.37.
5. ¿A qué escala están los dos dibujos anteriores?
6. ¿Qué ángulo tuviste que girar el patrón?

Este proceso se puede repetir de manera indefinida pero nosotros vamos a hacerlo solamente una vez más. Ahora cada uno de los cinco triángulos que se obtuvieron anteriormente hay que dividirlo en cinco triangulitos de la misma manera en que se dividió a ABC al inicio. Se va a formar un nuevo patrón como el que se observa en la figura 2.38. ¿Cuántos triangulitos hay en total?

7. Ahora hay que copiar, agrandar y girar el patrón de la figura 2.38 de manera que el triángulo amarillo coincida con *ABC*. En la figura 2.39 se observa la figura resultante a escala donde el triángulo amarillo representa al triángulo *ABC*. ¿Qué ángulo se tuvo que rotar el patrón?
8. En la figura 2.39, ¿cuál es la razón de semejanza entre el triángulo amarillo y el triángulo mayor?

Hacia la prueba Planea

Utiliza esta sección para preparar tu prueba Planea.

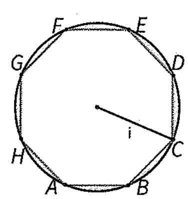
1. Son las rectas que forman un ángulo de 90°.
   a. Rectas paralelas
   b. Rectas tangentes
   c. Rectas secantes
   d. Rectas perpendiculares

2. Dos ángulos son suplementarios si:
   a. su suma es igual a 180°
   b. su suma es igual a 90°
   c. su suma es mayor a 180°
   d. su suma es igual a 360°

3. Cada ángulo interno de un polígono mide 165.6°, ¿cuántos lados tiene el polígono?
   a. 25
   b. 24
   c. 23
   d. 22

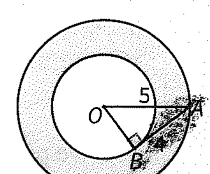
4. En un polígono se pueden trazar 20 diagonales desde un vértice, ¿cuántos lados tiene el polígono?
   a. 25
   b. 24
   c. 23
   d. 22

5. Halla la expresión que determina el área sombreada.



   a. $\pi(4.05)^2 - 16$
   b. $\pi(4.05)^2 - 16(\sqrt{(4.05)^2 - 1})$
   c. $\pi(4.05)^2 - 8(\sqrt{(4.05)^2 - 1})$
   d. $\pi(4.05)^2 - \frac{16(\sqrt{4.05 - 1})}{2}$

6. Halla el área sombreada utilizando los datos de la imagen.



   a. 25π
   b. 9π
   c. 2π
   d. 16π

7. Si un cubo tiene un volumen de 729 cm³, ¿cuánto mide cada uno de sus lados?
   a. 243 cm
   b. 81 cm
   c. 27 cm
   d. 9 cm

8. Las medidas de un terreno cuadrangular son 120 m, 60 m, 80 m y 70 m. ¿Cuál es su perímetro?
   a. 0.33 km
   b. 1.33 km
   c. 1.5 km
   d. 0.5 km

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Descomponer un polígono en triángulos.	Descompongo un polígono en triángulos para hallar la suma de sus ángulos internos.		
	Aplico la fórmula para hallar la suma de los ángulos internos de un polígono.		
	Descompongo un polígono irregular en triángulos para hallar el área.		
Construir un triángulo semejante a uno dado.	El trabajo refleja mi comprensión del tema "triángulos semejantes".		
	Trazo triángulos semejantes a uno dado.		
	Resuelvo problemas que involucran triángulos semejantes.		
Medir la altura de un árbol a partir de su sombra.	El trabajo presentado tiene claridad y refleja mi comprensión del tema.		
	El método empleado para resolver el problema es correcto.		
	El resultado hallado es correcto o corresponde con una aproximación de la realidad.		

Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Caracteriza y clasifica a las configuraciones espaciales triangulares según sus disposiciones y sus relaciones.	Identifico figuras congruentes y semejantes.	Comprendo el significado de que dos figuras sean congruentes o semejantes.	Empleo la congruencia y la semejanza de triángulos en mi vida cotidiana.
Significa los criterios de congruencia de triángulos constructivamente mediante distintos medios.	Sé que existen criterios para determinar la congruencia y la semejanza de dos triángulos.	Aplico los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos para demostrar que dos triángulos lo son.	Comprendo por qué los criterios de congruencia y de semejanza funcionan y puedo argumentar por qué no basta saber que los ángulos de dos triángulos sean iguales para implicar la congruencia.
Interpreta visual y numéricamente al teorema de Tales en diversos contextos y situaciones cotidianas.	Conozco el teorema de Tales.	Aplico el teorema de Tales sustituyendo valores en las fórmulas.	Sé demostrar el teorema de Tales y comprendo su relación con los triángulos semejantes.

Tercer parcial

Eje: Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos geométrico y trigonométrico

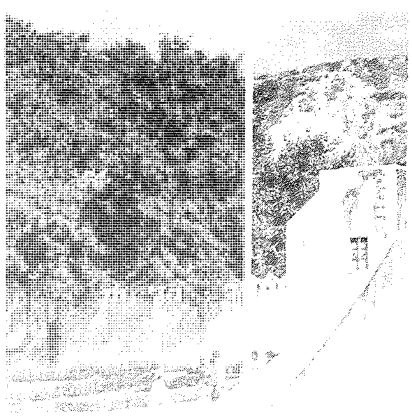
- Trazado y angularidad: elementos de la trigonometría plana.

- Conceptos básicos de lo trigonométrico.
- Usos y funciones de las relaciones trigonométricas en el triángulo. Funciones trigonométricas sus propied[illegible]
- Medidas de ángulos y relaciones trigonométricas. Del círculo unitario al plano cartesiano. Una introducción de las razones de magnitudes a las funciones reales. Visualizando fórmulas e identidades trigonométricas.

- Medida de ángulos y razones trigonométricas de ciertos ángulos: ¿qué tipo de argumentos trigonométricos se precisan para tratar con triángulos, sus propiedades y estructuras, relaciones y transformaciones?
- ¿Por qué la relación entre razones de magnitudes sirve para analizar situaciones contextuales?, ¿cómo se diferencia de la razón proporcional entre magnitudes?
- El círculo trigonométrico, relaciones e identidades trigonométricas. Tablas de valores de razones trigonométricas fundamentales. ¿De la antigüedad clásica a la geo localización?
- Las identidades trigonométricas y sus relaciones. ¿Cómo uso las identidades trigonométricas en diversos contextos de ubicación en el espacio, la topografía y la medición?

- Caracteriza a las relaciones trigonométricas según sus disposiciones y sus propiedades.
- Interpreta y construye relaciones trigonométricas en el triángulo.
- Analiza al círculo trigonométrico y describen a las funciones angulares, realiza mediciones y comparaciones de relaciones espaciales.

- Calcular el valor del seno de 30°.
- Argumentar por qué el ángulo de 45° y el seno de 45° son iguales, pero el seno de 30° y el coseno de 30° son distintitos entre sí.
- Estimar el valor de sen ^2x + cos ^2x.



Habilidades socioemocionales

Habla y escucha atento

Para tu vida diaria

Practica durante la semana hablar y escuchar atentamente con alguna persona. Puede ser un familiar, un maestro o un amigo. Registra en una tabla los beneficios que encontraste al utilizar esta técnica.

¿Alguna vez te ha pasado que la persona con la que estás hablando te interrumpe constantemente o que cuando alguien más te está platicando algo dejas de prestarle atención y olvidas lo que te estaba diciendo? En estas situaciones la comunicación se dificulta. Por otro lado, ¿cómo te sientes cuando alguien realmente te escucha? En esta lección vamos a aplicar una técnica para escuchar y hablar atentamente.

1. Lee los letreros de habla y escucha atenta.

Habla atento	Escucha atento
◦ Desde tu experiencia ◦ Breve y preciso ◦ Sobre el tema ◦ Amable	Atención a la persona que está hablando. No sigas estos impulsos y mantén tu atención en la persona que está hablando: ◦ Interrumpir ◦ Juzgar

2. Busca a un compañero o compañera con quien trabajar. Conversarán durante cuatro minutos. Escucharán una campana que indicará los cambios de acciones durante este ejercicio.

   Paso 1: Al sonar la campana por primera vez uno de los dos hablará durante dos minutos y el otro escuchará atentamente. Recuerda aplicar cada uno de los puntos del habla y escucha atenta. Cuando escuches, observa si aparece el deseo de interrumpir, dar tu opinión o si te distraes. Deja pasar esos impulsos como cualquier distracción y regresa tu atención a la persona que está hablando. El tema de la conversación será: ¿Quién es tu personaje favorito de alguna serie, cómic o película y qué es lo que más te gusta de él o ella?

   Paso 2: Al escuchar la campana por segunda vez cambien de turno. La persona que escuchó, ahora hablará durante dos minutos y la persona que habló, escuchará.

3. Discute con tus compañeros y con el profesor acerca de las siguientes preguntas:
   a. ¿Cómo les fue? ¿Lograron ver sus tendencias al hablar y al escuchar?
   b. ¿Para quiénes fue fácil? ¿A quiénes se les hizo difícil?
   c. ¿Cómo te sentiste al escuchar atentamente a tu compañero?
   d. ¿Cómo te sentiste al ser escuchado atentamente?

4. Reflexiona y responde:
   a. ¿Qué beneficio podría tener escuchar y hablar con los demás de forma atenta?¿Qué puedes hacer para evitarla?

Resumen

El doctor Bisquerra, catedrático de la Universidad de Barcelona y autor de varios libros, afirma que una de las habilidades socioemocionales más importantes es escuchar. En esta lección practicaste una estrategia puntual para escuchar y hablar con atención. Al practicarla le mostramos respeto al otro, la comunicación es más eficaz, ayuda a resolver conflictos, crea un ambiente propicio para el aprendizaje y se genera mayor empatía en el grupo. Inténtalo, seguro notarás un cambio a tu alrededor..

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

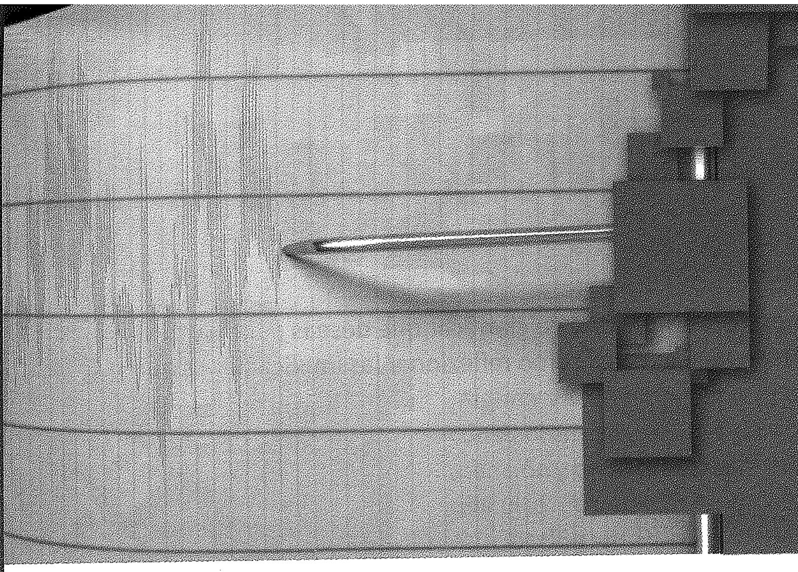
1. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama general de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ____________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Medida de ángulos y razones trigonométricas de ciertos ángulos

Glosario

Trigonometría, del griego trigonos, triángulo y metría medir.

¿Qué tipo de argumentos trigonométricos se precisan para tratar con triángulos, sus propiedades y estructuras, relaciones y transformaciones?

La **trigonometría** es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los ángulos de un triángulo y sus lados. En las secciones anteriores vimos cómo aplicar los conceptos de ángulos, congruencia, semejanza, escala, entre otros, para calcular distancias a las que en principio no se puede acceder. La trigonometría, en cierta manera, es un lenguaje que sintetiza varios de esos métodos en fórmulas que pueden aplicarse más directamente.

Ejemplo

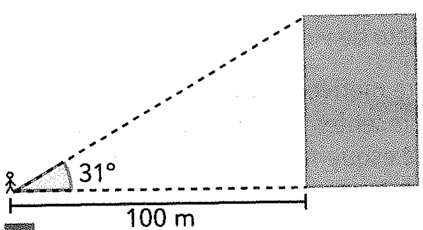


Figura 3.1

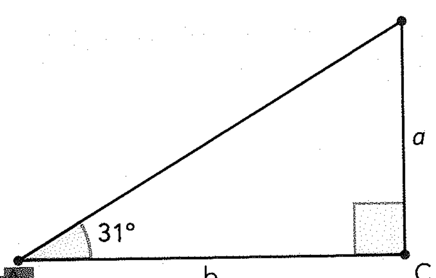


Figura 3.2

Quique se encuentra a 100 metros de un edificio y mide que el ángulo de elevación, con respecto a la horizontal, que se forma al observar el techo del edificio es de 31° (figura 3.1). ¿Qué altura tiene el edificio?

Resolvamos este problema de una manera práctica usando semejanza. Para esto primero construimos un triángulo semejante que capture la esencia del problema. En la figura 3.2 se observa dicho triángulo, el cual es semejante al de arriba por criterio AA. Usa tu regla para medir los catetos de este triángulo, marcados con a y b.

Ahora, la semejanza nos dice que estas proporciones deben de ser iguales:

$$\frac{x}{a}=\frac{100}{b}.$$

Reescribamos esta igualdad así:

$$\frac{x}{100}=\frac{a}{b}.$$

Este paso puede parecer innecesario, pero más tarde veremos que es de gran utilidad para motivar la definición de la función trigonométrica tangente.

Con los valores de a y b que encontraste, calcula a/b. Por último, encuentra el valor de x despejando la igualdad de arriba. Te debe quedar 60 metros aproximadamente.

Este tipo de problemas aparece en muchos contextos. Poniendo atención en los detalles se observa que tres datos jugaron un papel importante:

- Una configuración con forma de triángulo rectángulo.
- Un ángulo dado, en este caso de 31°.
- Una medida dada, en este caso de 100 m.

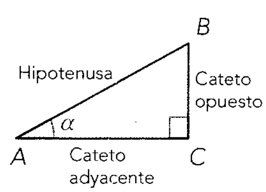
Imagina que tuvieras una tabla que enlistara todas las posibles configuraciones de triángulos rectángulos para todas las posibles medidas de ángulos y con los valores precisos de los lados que les corresponden. Tal tabla te ahorraría la mitad del trabajo que hicimos anteriormente. Pues resulta que ya tenemos una "tabla" así, o mejor dicho, un formulario con toda esa información, se llama trigonometría.

Actualmente las funciones trigonométricas csc, sec y cot ya están cayendo en desuso. Antes de la invención de la calculadora eran importantes, ya que marcaban la diferencia entre hacer una división o una multiplicación. ¿Tú qué prefieres multiplicar o dividir?

Las razones trigonométricas

Ahora sí, definamos las funciones trigonométricas.

Considera un ángulo α dentro de un triángulo rectángulo ABC, como se muestra. Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo α se definen como:

<table>
<tr><td>$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC}$</td><td>$\csc\alpha = \frac{AC}{BC}$</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$</td><td>$\sec\alpha = \frac{AC}{AB}$</td></tr>
<tr><td>$\tan\alpha = \frac{BC}{AB}$</td><td>$\cot\alpha = \frac{AB}{BC}$</td></tr>
</table>

Una forma para acordarte de cómo van las funciones trigonométricas es:

Primero recuerda que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el lado opuesto al ángulo de 90° y es el más largo de los tres lados. Ahora, con respecto al ángulo α, llamamos a BC el cateto opuesto (*c. o.*) y a AB el cateto adyacente (*c. a.*).

Por tanto, otra forma de pensar en las funciones trigonométricas es:

Si tomas mucha coca-coca te va a dar hipo-hipo.		
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{c.o.}}{\text{hipo}}$	$\cos\alpha = \dfrac{\text{c.a.}}{\text{hipo}}$	$\tan\alpha = \dfrac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}}$

Volviendo al ejemplo del inicio y ahora usando trigonometría, podemos escribir:

$$\tan 31° = \frac{x}{100} = \frac{a}{b}.$$

Te puedes dar cuenta que al calcular a/b, lo que realmente estabas haciendo era calcular a mano tan(31°). Usa la calculadora para ver cuánto vale tan(31°), ¿qué tan buena fue tu medición?

¡Cuidado! Al usar la calculadora tienes que poner atención en qué unidades estás usando. Las calculadoras generalmente manejan tres unidades: DEG (grados sexagesimales), RAD (radianes) y GRAD (gradianes). Fíjate en qué unidad está tu calculadora y asegúrate de configurarla en la unidad que quieres usar. Para fines de estudio, vamos a manejar grados sexagesimales DEG (proviene del inglés *degree*, grados).

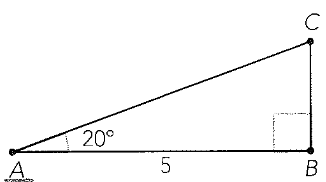


Figura 3.3

Ejemplo

Considera un triángulo como el que se muestra en la figura 3.3. Calcula las medidas de los lados faltantes.

El lado que sí nos dan corresponde a cateto adyacente del ángulo de 20°. Los datos faltantes son el cateto opuesto, *BC*, y la hipotenusa, *AC*. Para encontrar estos datos necesitamos usar las funciones tangente y coseno respectivamente.

Primero:

$$\tan 20° = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{5}.$$

Con la calculadora obtenemos que tan(20°) = 0.364. Así, la medida de *BC* es $0.364 \times 5 = 1.82$.

Ahora:

$$\cos 20° = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{AC}\text{, reacomodando, queda: } AC = \frac{5}{\cos 20°}.$$

Usa tu calculadora para encontrar el valor de cos(20°) y luego calcula la medida de *AC*. Otra opción es utilizar el teorema de Pitágoras, pues conoces los dos catetos.

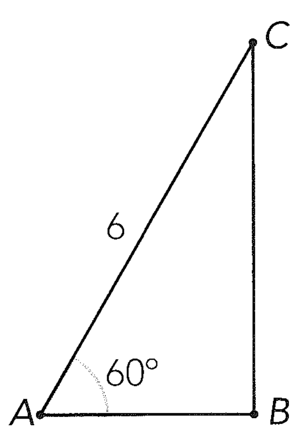


Figura 3.4

Ejemplo

Considera un triángulo como el que se muestra en la figura 3.4. Calcula las medidas de los lados faltantes.

El dato que nos dan corresponde a la hipotenusa. Para calcular los catetos necesitamos usar las funciones seno y coseno.

Primero:

$$\operatorname{sen}60^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{6}.$$

Usa tu calculadora para calcular sen(60°) y luego encuentra la medida de BC.

Ahora:

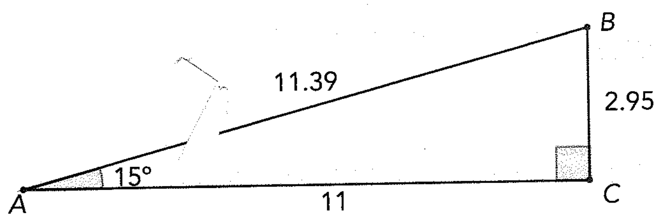
$$\cos 60^\circ=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{6}.$$

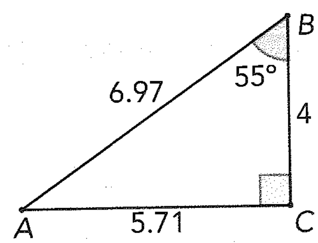
Otra vez, usa tu calculadora para calcular cos(60°) y luego encuentra la medida de AB.

Actividad de aprendizaje 1

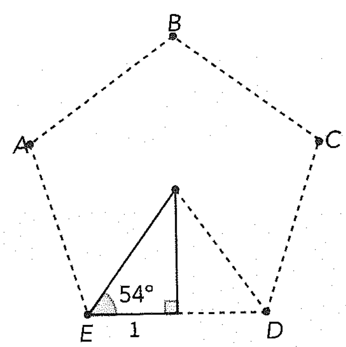
Con base en lo aprendido, responde lo siguiente.

1. Usa las figuras que se muestran para calcular a mano los valores del seno, coseno y la tangente de 15° y de 55°.





2. Acuérdate que el ángulo interior de un pentágono regular es de 108°, entonces el ángulo marcado en la figura corresponde a la mitad, esto es, 54°. Usa la calculadora para encontrar el valor de tan(54°). Con ayuda de la figura y del valor de tan(54°) calcula la medida de la apotema de un pentágono regular de lado 2. Por último, calcula también el área del pentágono.



3. Usa la misma idea del ejercicio anterior para calcular la apotema y el área de un hexágono regular de lado 2.
4. Responde las preguntas.
   a. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero cuyo perímetro es 18?
   b. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo cuya base mide 5 centímetros y el ángulo formado entre la altura y la diagonal es de 74.05°?
   c. Dado un triángulo rectángulo, si sabemos que el seno de uno de sus ángulos agudos es 0.5, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?

Triángulos y ángulos notables

Los ángulos de 30°, 60° y 45° son especiales porque aparecen en las dos figuras básicas de tres y cuatro lados: triángulos equiláteros y cuadrados. Esto nos permite calcular los valores de las funciones trigonométricas en ellos a través del teorema de Pitágoras, como veremos a continuación.

Razones trigonométricas de 30° y de 60°

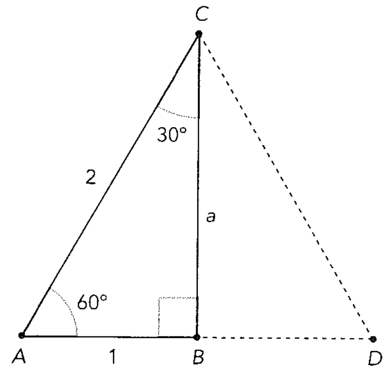


Figura 3.5

Considera la mitad de un triángulo equilátero de lado 2 como se observa en la figura 3.5.

¿Te parece conocida esta configuración? La vimos en el problema de la Escuela flotante (página 34). También en el cálculo de la apotema de un hexágono.

Ahora la vamos a estudiar desde el punto de vista de la trigonometría. El lado AC mide 2 y el lado AB mide 1, por ser la mitad del segmento AD. Para saber la medida del lado BC usamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

sustituyendo los valores nos queda que $a^2 + 1 = 4$, de donde $a^2 = 3$ y $a = \sqrt{3}$.

Poniendo atención en los ángulos nos damos cuenta que $\angle ABC$ es recto, $\angle CAB = 60°$ por ser ángulo de un triángulo equilátero y $\angle ACB = 30°$ por ser la mitad de un ángulo de un triángulo equilátero.

Resumiendo, sabemos todo lo que hay que saber acerca del triángulo ABC, sus lados y sus ángulos. En el lenguaje de trigonometría esto se resume en la tabla que nos da los valores de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de los ángulos de 30° y 60°.

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Actividad de aprendizaje 2

Lleva a cabo la siguiente actividad.

1. Para pensar: Construye un triángulo equilátero de lado 10 cm y calcula las razones trigonométricas para el ángulo de 60°. ¿Cambian los valores de la tabla?

Razones trigonométricas de 45°

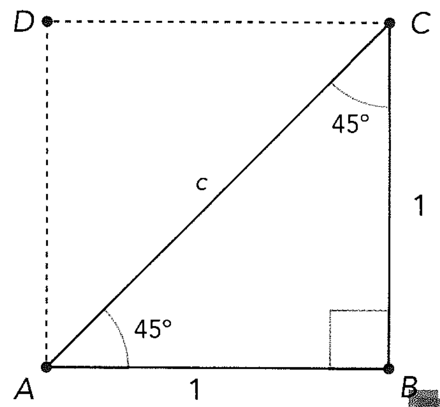


Figura 3.6

Ahora estudiaremos los ángulos de 45°. Estos aparecen en los triángulos que se forman al partir por la mitad un cuadrado a través de una diagonal.

Consideremos un cuadrado *ABCD* de lado 1 como se muestra en la figura 3.6. Primero nos cercioramos que los datos del triángulo *ABC* son correctos.

Los lados *AB* y *AC* miden 1 por ser lados del cuadrado. El lado *AC* lo podemos calcular vía el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2, \text{ de aquí que } c = \sqrt{2}$$

En seguida, nos fijamos en los ángulos. El ángulo *ABC* es recto por ser ángulo de un cuadrado y los ángulos *ACB* y *CAB* son mitades de ángulos de 90°, por tanto, miden 45° cada uno (formalmente estamos usando el criterio LLL para decir que los triángulos *ABC* y *ACD* son congruentes y así, se cumple que $\angle DAC = \angle BAC$ y $\angle DCA = \angle BCA$).

Resumiendo, sabemos todo lo que hay que saber acerca del triángulo *ABC*, sus lados y sus ángulos. En el lenguaje de trigonometría esto se resume en la tabla que nos da los valores de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante del ángulo de 45°:

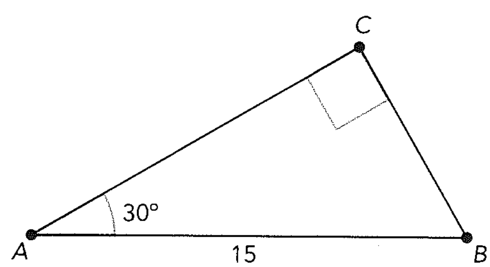
	sen	cos	tan	cot	sec	csc
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

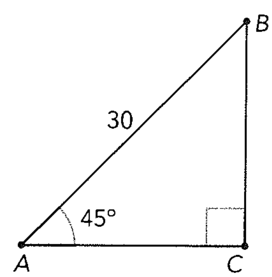
Para pensar: ¿cambiará la tabla si consideramos un cuadrado de lado 2 o uno de lado 10?

Actividad de aprendizaje 3

Con base en lo aprendido, responde lo siguiente.

1. Usa los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 60° y 45° para encontrar las medidas faltantes en estas figuras.





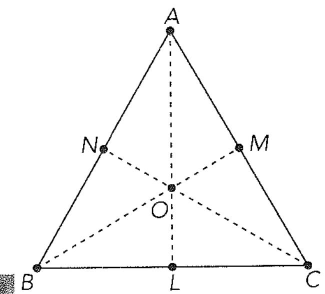


Figura 3.7

2. En la figura 3.7 se muestra un triángulo equilátero *ABC* de lado 2 en donde se han trazado las tres alturas.

   a. ¿Cuánto mide cada altura?

   b. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle NOB$?

   c. ¿Cuánto mide cada uno de los segmentos *AO* y *OL*?

   d. Para repasar el tema de triángulos semejantes, escribe qué triángulos son semejantes.

Actividad de aprendizaje 4

Productos esperados

Esta actividad pertenece a tu portafolios de evidencias, así que deberás desarrollarla en hojas sueltas. Lee con atención lo que se pide.

1. En hojas separadas reproduce los triángulos indicados:

   a. Equilátero que tiene 2 cm por lado.

   b. Equilátero de 4 cm por lado.

   c. Equilátero de un centímetro por lado.

2. Traza una altura y argumenta por qué se generan ángulos de 30°.

3. Reproduce una tabla como la siguiente y llénala.

Triángulo	Valor del cateto opuesto a 30°	Valor del cateto adyacente a 30°	Hipotenusa	sen 30°
2 cm por lado				
4 cm por lado				
1 cm por lado				

4. ¿Los valores obtenidos en la columna seno de 30°, son equivalentes? Escribe las reducciones de las expresiones hasta obtener 0.5.

Actividad de aprendizaje 5

Productos esperados

Esta actividad pertenece a tu portafolios de evidencias, así que deberás desarrollarla en hojas sueltas. Lee con atención lo que se pide.

1. En hojas separadas reproduce un triángulo rectángulo isósceles y da un argumento del porqué los ángulos agudos miden 45°.

2. Con base en este argumento y con el que diste en el punto 2 de la actividad de aprendizaje 4, di por qué el seno y el coseno de 45° valen lo mismo pero no ocurre lo mismo con el ángulo de 30°.

¿Por qué la relación entre razones de magnitudes sirve para analizar situaciones contextuales?

En la sección de semejanza vimos cómo calcular distancias de manera indirecta explotando la relación que existe entre segmentos proporcionales.

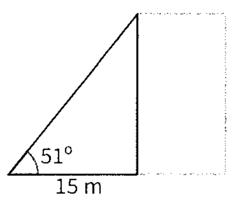
Por ejemplo, mediste la altura de un árbol usando su sombra y comparando con un triángulo semejante del cual sí sabías sus medidas. También puedes calcular el ancho de un río si puedes llevar a la práctica cierto diseño geométrico a través de triángulos semejantes.

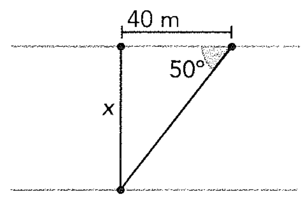
En esta sección repasaremos estos problemas desde el punto de vista de la trigonometría. Además, veremos cómo este nuevo lenguaje nos puede ayudar a resolver otra variedad de problemas.

Actividad de aprendizaje 6

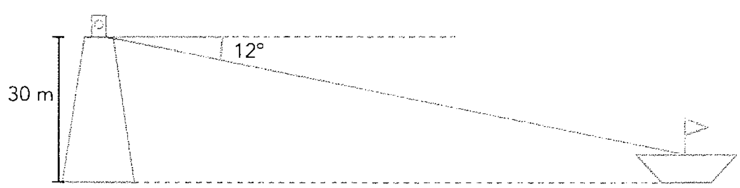
Usa las técnicas vistas al principio de esta unidad junto con las razones trigonométricas para hallar lo que se pide. Puedes usar la calculadora, pero cuida que esté en grados sexagesimales DEG.

1. Calcula la altura del edificio y el ancho del río con los datos que se dan.

a. 

b. 

2. Un faro tiene una altura de 30 m sobre el nivel del mar y observa a la distancia un barco con un ángulo de declive con respecto a la horizontal de 12°. ¿A qué distancia de tierra se encuentra el barco? Supongamos al barco como un punto, para fines prácticos esto se puede hacer, aunque en un problema real se deberá especificar la altura del barco.



3. Responde los siguientes ejercicios.

   a. La sombra de un árbol mide dos metros. Si el ángulo de elevación entre el final de la sombra y la copa es de 30°, ¿cuánto mide de alto el árbol?

   b. La casa de Juan está a 250 m de la de Pedro. Si sus casas junto con la escuela son los vértices de un triángulo rectángulo, ¿quién vive más cerca de la escuela si sabemos que el ángulo entre la casa de Pedro y la escuela y la casa de Pedro y la casa de Juan es de 75°?

¿Cómo se diferencia de la razón proporcional entre magnitudes?

Los problemas vistos hasta ahora se resuelven de dos formas: usando semejanza y proporción entre magnitudes de una manera ingeniosa o a través de la aplicación de razones trigonométricas. Dependiendo de gustos, tal vez uno tenga preferencia por la primera por ser "puramente" geométrica, otros tal vez prefieran los métodos trigonométricos porque, una vez dominada la técnica, proporciona un camino más directo.

En esta sección veremos otra ventaja de la trigonometría: transforma problemas geométricos en problemas algebraicos. Ilustraremos esta idea con un ejemplo.

Ejemplo

Quique sigue midiendo alturas de edificios, pero ahora se encuentra con el problema de que no puede acercarse al edificio. Por tanto, hace dos mediciones de ángulos como se observa en la figura y también mide la distancia que se tuvo que mover para realizar las mediciones. ¿Cuál es la altura del edificio?

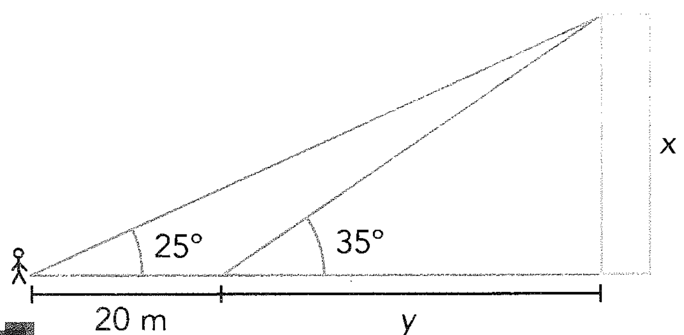


Figura 3.8

Para este problema necesitamos aplicar dos veces la función trigonométrica tangente, ya que tenemos dos variables. De acuerdo a la figura 3.8 tenemos que:

$$\tan 35° = \frac{x}{y}.$$

También:

$$\tan 25° = \frac{x}{20+y}.$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos que $\tan(35°) = 0.7$ y $\tan(25°) = 0.466$. A partir de aquí el problema, en principio geométrico, se transforma en uno algebraico. Esto es, hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$0.7y = x$$
$$0.466(20+y) = x.$$

Este lo resolvemos con el método de igualación. Nos queda una ecuación para y:

$$0.7y = 0.466(20+y) \text{ por tanto:}$$
$$0.7y = 9.32 + 0.466y.$$

Así, $0.234y = 9.32$, de donde se sigue $y = 39.829$. Por último, sustituimos en la primera ecuación para obtener el valor $x = 0.7(39.829) = 27.88$, que es la altura del edificio.

$y(0.7-0.46) = 9.32$

Actividad de aprendizaje 7

Con base en lo aprendido, responde lo siguiente.

1. En una torre de electricidad pasan dos tipos de cable, en la parte más alta pasan los cables de alta tensión y en la parte de en medio pasan los cables de teléfono. Un observador a 60 m mide los ángulos de elevación como se observa en la figura 3.9.
   a. ¿Cuál es la altura total de la torre?
   b. ¿A qué altura pasan los cables de teléfono?
   c. ¿Cuál es la distancia entre los dos tipos de cable?

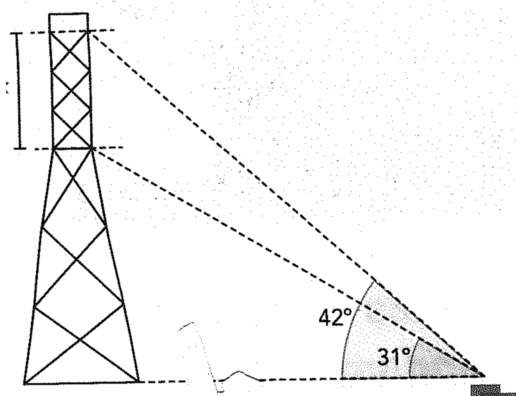
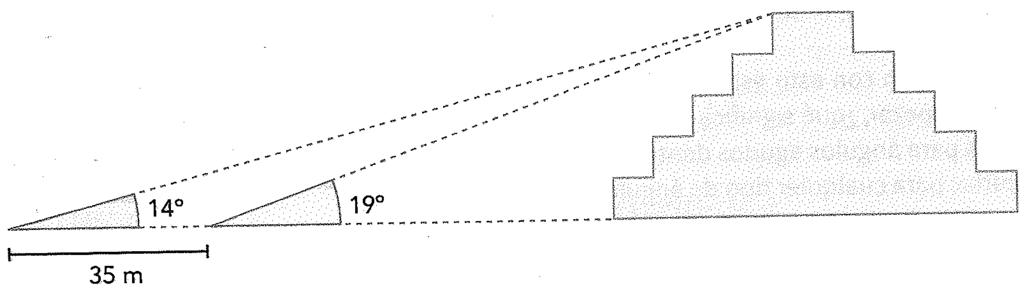
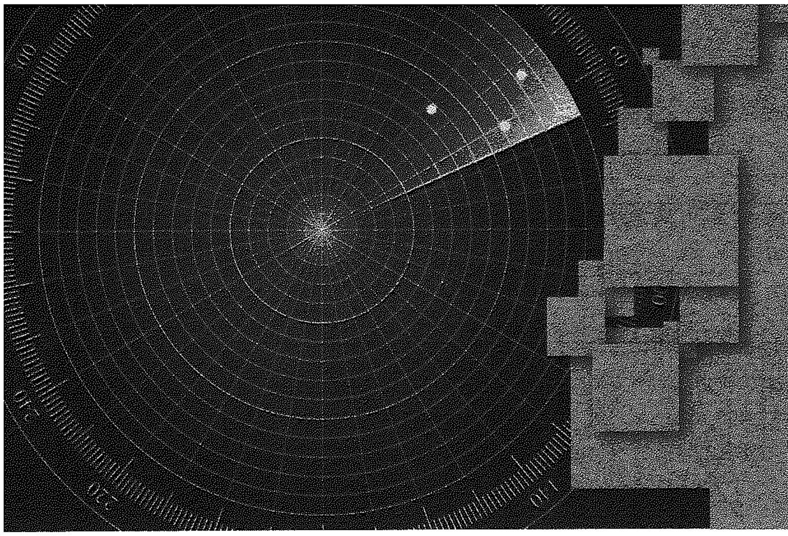


Figura 3.9

2. Ayuda a Quique a encontrar la altura de la pirámide con los datos que se dan.



3. Resuelve los problemas. Recuerda dibujar un esquema que te permita visualizar el problemas.
   a. Un árbol de 12 m de altura, proyecta una sombra sobre un terreno horizontal. Si el ángulo de elevación desde el extremo de ésta hasta la copa es de 75°, ¿cuánto mide la sombra?
   b. Juan observa, desde el suelo, el final de un edificio con un ángulo de elevación de 35°. Mientras que Pedro observa el mismo edificio con un ángulo de elevación de 28°. Si el edificio mide 40 m de alto, ¿a qué distancia se encuentran Juan y Pedro?
   c. Desde la punta del cerro del pueblo, Pablo ve su casa con un ángulo de depresión de 60°, si él sabe que la distancia del cerro al su casa es de 300 m, sobre la horizontal, y que del pie del cerro al centro del mismo hay una longitud de 100 m, ¿cuál es la altura del cerro si Pablo mide 1.70 m? En este tipo de problemas hay que suponer condiciones óptimas, como que la base del cerro es "redondita" o que la base en donde se encuentran el cerro y la casa es completamente plana.
   d. Un camino para resolver el ejercicio anterior es con trigonometría. Seguramente utilizaste la tangente de 30° en algún momento, sin embargo hay otra solución completamente geométrica. ¿Cuál es?



El círculo trigonométrico, relaciones e identidades trigonométricas

Tablas de valores de razones trigonométricas fundamentales

En esta sección veremos que las funciones trigonométricas no son independientes una de la otra. Las relaciones que existen entre ellas se llaman identidades trigonométricas. Por ejemplo, seno y cosecante son una la recíproca de la otra, es decir, $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$. De la misma manera, podemos deducir otras identidades que listaremos en esta sección.

Relacionado con esto están las identidades trigonométricas para ángulos de más de 90°. Pero, para empezar, ¿qué significa sen(90°)? En la sección anterior definimos las funciones trigonométricas para ángulos agudos dentro de un triángulo rectángulo. En esta sección veremos cómo definirlas para cualquier tipo de ángulo.

Identidades trigonométricas

Empecemos con las identidades recíprocas.

Recuerda que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC} \text{ y } \csc\alpha = \frac{AC}{BC}.$$

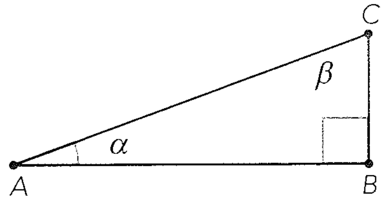


Figura 3.10

Por tanto, se puede observar que si las multiplicamos, las proporciones de segmentos se cancelan y queda 1, es decir:

$$\operatorname{sen}\alpha \times \csc\alpha = 1.$$

Decimos entonces que sen α y csc α son recíprocos. Se puede verificar lo mismo para las parejas cos α, sec α y tan α, cot α.

Por otro lado, si dividimos sen α entre cos α nos queda:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AB} = \tan\alpha.$$

También tenemos las identidades de ángulos complementarios. En la figura 3.10, el ángulo β es el complementario de α, es decir, $\alpha + \beta = 90°$, alternativamente, $\beta = 90° - \alpha$. Al escribir las razones trigonométricas de cada uno se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \tfrac{BC}{AC} \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \tfrac{AB}{AC}$$
$$\cos\alpha = \tfrac{AB}{AC} \rightarrow \cos\beta = \tfrac{BC}{AC}$$
$$\tan\alpha = \tfrac{BC}{AB} \rightarrow \tan\beta = \tfrac{AB}{BC}$$

Así, observamos que sen $\alpha = \cos\beta$, *cos* $\alpha =$ sen β y $\tan\alpha \times \tan\beta = 1$.

Ahora veremos las identidades que se deducen del teorema de Pitágoras. Podemos escribir el teorema de Pitágoras como $BC^2 + AB^2 = AC^2$. Si dividimos toda la igualdad entre AC^2, nos queda:

$$\frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB}{AC^2} = 1.$$

En lenguaje de trigonometría esto corresponde precisamente a:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Actividad de aprendizaje 8

Con base en lo aprendido, responde lo siguiente.

1. Deduce las identidades:

   a. $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

   b. $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

   de la misma manera que en el texto, pero ahora dividiendo $BC^2 + AB^2 = AC^2$ entre AB^2 y BC^2, respectivamente.

2. Deduce las identidades trigonométricas:

   a. $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

   b. $(\tan x)(\operatorname{sen} x) + \cos x = \sec x$

   c. $\tan x + \operatorname{ctg} x = \sec\alpha \csc\alpha$

   d. $\cot^2 x = \cos^2 x + (\cot x \cos x)^2$

   e. $\csc\alpha \sec\alpha = \cot\alpha + \tan\alpha$

   f. $(\tan x + \operatorname{ctg} x)\operatorname{sen} x \cos x = 1$

   g. $\dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

   h. $\dfrac{1}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \sec\alpha - \tan\alpha$

   i. $2\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{sen}^2\alpha$

   j. $\operatorname{sen}\alpha \sec\alpha \cot\alpha = 1$

   k. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha + \csc\alpha} = \operatorname{sen}\alpha \tan\alpha$

   l. $\dfrac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha} + \dfrac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha} = 1 + \tan\alpha + \cot\alpha$

   m. $\operatorname{sen}\alpha \sec\alpha = \tan\alpha$

   n. $1 + \tan^2\alpha = \sec^3\alpha \cos\alpha$

   o. $2\tan\alpha + 1 = \dfrac{\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

   p. $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$

Tablas de razones trigonométricas

Ángulo	sen	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.0000	∞	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.0002	57.299	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.0014	19.107	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.0024	14.336	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.0038	11.474	85°
6°	0.1045°	0.9945°	0.1051°	9.5144°	1.0055°	9.5668°	84°
7°	0.1219°	0.9925°	0.1228°	8.1443°	1.0075°	8.2055°	83°
8°	0.1392°	0.9903°	0.1405°	7.1154°	1.0098°	7.1853°	82°
9°	0.1564°	0.9877°	0.1584°	6.3138°	1.0125°	6.3925°	81°
10°	0.1736°	0.9848°	0.1763°	5.6713°	1.0154°	[illegible]	80°
11°	0.1908°	0.9816	0.1944°	5.1446°	1.0187°	5.2408°	79°
12°	0.2079°	0.9781°	0.2126°	4.7046°	1.0223°	4.8097°	78°
13°	0.2250°	0.9744°	0.2309°	4.3315°	1.0263°	4.4454°	77°
14°	0.2419°	0.9703°	0.2493°	4.0108°	1.0306°	4.1336°	76°
15	0.2588°	0.9659°	0.2679°	3.7321°	1.0353°	3.8637°	75°
16°	0.2756°	0.9613°	0.2867°	3.4874°	1.0403	3.6280°	74°
17°	0.2924°	0.9563°	0.3057°	3.2709°	1.0457°	3.4203°	73°
18°	0.3090°	0.9511°	0.3249°	3.0777°	1.0515	3.2361°	72°
19°	0.3256°	0.9455°	0.3443°	2.9042°	1.0576°	3.0716°	71°
20°	0.3420°	0.9397°	0.3640°	2.7475°	1.0642°	2.9238°	70°
21°	0.3584°	0.9336°	0.3849°	2.6051°	1.0711°	2.7904°	69°
22°	0.3746°	0.9272°	0.4040°	2.4751°	1.0785°	2.6695°	68°
23°	0.3907°	0.9205°	0.4245°	2.3559°	1.0864°	2.5593°	67°
24°	0.4067°	0.9135°	0.4452°	2.2460°	1.0946°	2.4586°	66°
25°	0.4226°	0.9063°	0.4663°	2.1445°	1.1034°	2.3662°	65°
26°	0.4384°	0.8988°	0.4877°	2.0503°	1.1126°	2.2812°	64°
27°	0.4540°	0.8910°	0.5095°	1.9626°	1.1223°	2.2027°	63°
28°	0.4695°	0.8829°	0.5317°	1.8807°	1.1326°	2.1301°	62°
29°	0.4848°	0.8746°	0.5543°	1.8040°	1.1434°	2.0627°	61°
30°	0.5000°	0.8660°	0.5774°	1.7321°	1.1547°	2.0000°	60°
31°	0.5150°	0.8572°	0.6009°	1.6643°	1.1666°	1.9416°	59°
32°	0.5299°	0.8480°	0.6249°	1.6003°	1.1792°	1.8871°	58°
33°	0.5446°	0.8387°	0.6494°	1.5399°	1.1924°	1.8361°	57°
34°	0.5592°	0.8290°	0.6745°	1.4826°	1.2062°	1.7883°	56°
35°	0.5736°	0.8192°	0.7002°	1.4281°	1.2208°	1.7434°	55°
36°	0.5878°	0.8090°	0.7265°	1.3764°	1.2361°	1.7013°	54°
37°	0.6018°	0.7986°	0.7536°	1.3270°	1.2521°	1.6616°	53°
38°	0.6157°	0.7880°	0.7813°	1.2799°	1.2690°	1.6243°	52°
39°	0.6293°	0.7771°	0.8098°	1.2349°	1.2868°	1.5890°	51°
40°	0.6428°	0.7660°	0.8391°	1.1918°	1.3054°	1.5557°	50°
41°	0.6561°	0.7547°	0.8693°	1.1504°	1.3250°	1.5243°	49°
42°	0.6691°	0.7431°	0.9004°	1.1106°	1.3456°	1.4945°	48°
43°	0.6820°	0.7314°	0.9325°	1.0724°	1.3673°	1.4663°	47°
44°	0.6947°	0.7193°	0.9657°	1.0355°	1.3902°	1.4396°	46°
45°	0.7071°	0.7071°	1.0000	1.0000°	1.4142°	1.4142°	45°
	cos	sen	cot	tan	csc	sec	Ángulo

Actividad de aprendizaje 9

Productos esperados

En hojas separadas transcribe la actividad y responde las preguntas. Esta actividad pertenece a tu portafolios de evidencias así que debes guardar el resultado como prueba de tu aprendizaje.

1. Utiliza la tabla de valores trigonométricos para sustituirlos en las siguientes expresiones.

   a. $\text{sen}^2 08^\circ + \cos^2 08^\circ =$ __________ + __________ = __________

   b. $\text{sen}^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ =$ __________ + __________ = __________

   c. $\text{sen}^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ =$ __________ + __________ = __________

   d. $\text{sen}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ =$ __________ + __________ = __________

   e. $\text{sen}^2 34^\circ + \cos^2 34^\circ =$ __________ + __________ = __________

   f. $\text{sen}^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ =$ __________ + __________ = __________

   g. $\text{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ =$ __________ + __________ = __________

   h. $\text{sen}^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ =$ __________ + __________ = __________

   i. $\text{sen}^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ =$ __________ + __________ = __________

   j. $\text{sen}^2 74^\circ + \cos^2 74^\circ =$ __________ + __________ = __________

   k. $\text{sen}^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ =$ __________ + __________ = __________

   l. $\text{sen}^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ =$ __________ + __________ = __________

2. Con base en lo anterior, ¿puedes decir cuánto vale la expresión $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$, para cualquier ángulo x?

3. Investiga la demostración de esta identidad trigonométrica, anótala y adjunta la actividad a tu portafolios de evidencias.

Circunferencia y trigonometría

El concepto de circunferencia está muy ligado a una rama de las matemáticas que posee numerosas aplicaciones entre las que se encuentran las técnicas de triangulación usadas en astronomía para medir distancias entre estrellas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación global mediante satélites. La rama de la que estamos hablando es la trigonometría, que se define como el estudio de las razones trigonométricas. La circunferencia unitaria se usa como herramienta para formar, por cada punto de ésta, un triángulo rectángulo, cuyos catetos e hipotenusa se operan para conocer sus ángulos no rectos y las funciones trigonométricas de estos ángulos.

¿De la antigüedad a la geolocalización?

Funciones trigonométricas

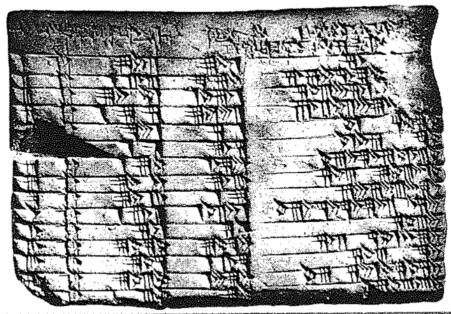


Figura 3.11

Ternas pitagóricas en la tablilla Plimpton 322.

Los principios de la trigonometría pueden rastrearse hasta los egipcios y babilonios. La tabla de arcilla Plimpton 322 muestra lo que ahora llamamos ternas Pitagóricas, es decir, números enteros a, b y c que satisfacen:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

La forma en que los números fueron calculados y el uso que se les daba siguen siendo tema de debate. Lo cierto es que los escribas babilonios estudiaron las propiedades de los triángulos rectángulos y las proporciones entre sus lados.

Glosario

Seno.

La palabra seno se deriva del latín sinus que significa bahía, pecho o doblez. *Sinus* es una traducción literal del árabe *jayb*, que a su vez es una interpretación incorrecta del sanscrito *jīvā* que significa cuerda.

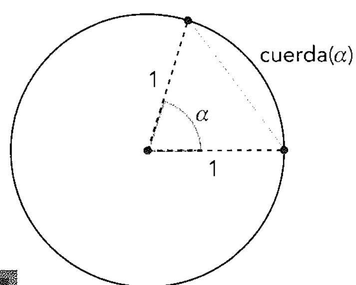


Figura 3.12

Poco después, con los griegos, la trigonometría empezó a tomar su forma actual, principalmente motivada por el estudio de la Astronomía. Sin embargo, los griegos usaban la función "cuerda". Esta función asigna a cada ángulo central en un círculo de radio 1 la longitud de la cuerda que sostiene. En otras palabras, el valor de cuerda(α) es precisamente la longitud del lado opuesto al ángulo α en un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 1.

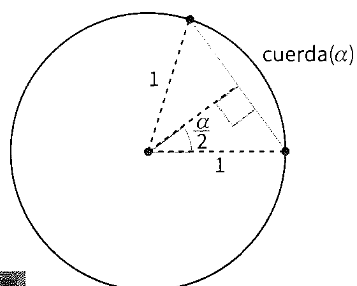


Figura 3.13

También hubo contribuciones importantes de parte de las culturas india e islámica quienes sentaron las bases para las funciones trigonométricas seno y coseno como las conocemos ahora. Durante el renacimiento en Europa, se continuó con el estudio de estas funciones y se trabajó arduamente en la elaboración de tablas trigonométricas, principalmente para su uso en la navegación. Para mediados del siglo XVIII, las funciones trigonométricas ya estaban asentadas en una base teórica sólida y se contaba con métodos de cálculo diferencial para aproximar sus valores.

Actualmente, las funciones trigonométricas son usadas en una gran variedad de áreas. En la topografía para medir alturas como ya hemos visto. En la navegación terrestre, marítima y aérea para medir distancias y calcular trayectorias. En la astronomía para medir distancias de objetos lejanos. En fin, la geometría, y en particular la trigonometría, cumplen con su función de ayudarnos a medir el mundo en que vivimos.

Actividad de aprendizaje 10

Con base en lo aprendido, responde lo siguiente.

1. Justifica la identidad trigonométrica con ayuda de la figura 3.13.

$$\text{cuerda}(\alpha) = 2\text{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

El círculo unitario

Hacemos un paréntesis ahora para repasar el plano cartesiano. Recuerda que podemos ubicar puntos en el plano con la ayuda de una pareja de números (x, y). El primer número indica cuánto te debes mover en la dirección horizontal, eje X; a la derecha del origen es la dirección positiva y a la izquierda negativa. De la misma manera, el segundo número indica cuánto te debes mover en la dirección vertical, el eje Y; hacia arriba es la dirección positiva y hacia abajo negativa.

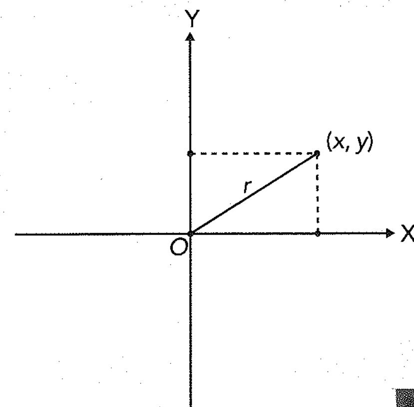


Figura 3.14

En este contexto, la distancia de un punto (x, y) al origen está dada por el teorema de Pitágoras y satisface:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En otras palabras, los puntos que están en el círculo con centro O y de radio r satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

En particular, nos interesa el círculo unitario, que es el círculo con centro O y radio 1. Por lo dicho anteriormente, el círculo unitario corresponde a los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Ahora, volviendo a la trigonometría, al inicio de la unidad presentamos las funciones trigonométricas para ángulos agudos, ya que su definición como proporciones entre lados de un triángulo rectángulo así lo requería. Sin embargo, las funciones trigonométricas se pueden definir para todos los tipos de ángulos.

Para hacer esto, primero tenemos que reinterpretar las razones trigonométricas presentadas antes. Recordemos que para calcular las razones trigonométricas de un ángulo, no importa el tamaño del triángulo que elijamos, basta con que tenga el ángulo deseado y uno de 90°. Usaremos esta libertad para, a partir de ahora, elegir triángulos rectángulos cuya hipotenusa mida 1. Así, al calcular los valores de sen y cos obtenemos:

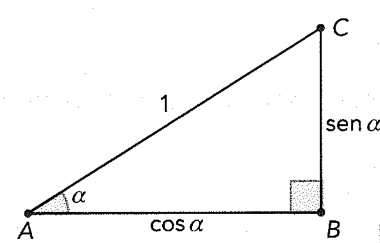


Figura 3.15

$$\text{sen}\alpha = \tfrac{BC}{1} = BC \text{ y } \cos\alpha = \tfrac{AB}{1} = AB.$$

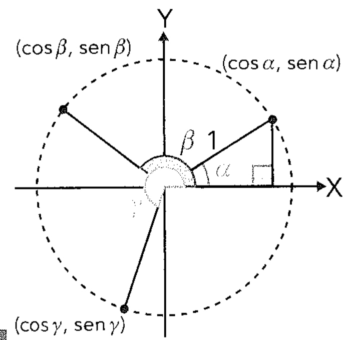


Figura 3.16

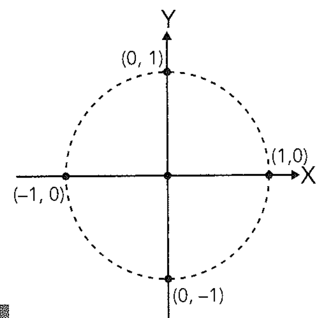


Figura 3.17

Desde este punto de vista, podemos pensar a las funciones trigonométricas cos α y sen α como las coordenadas (x, y) de un punto sobre el círculo unitario cuyo segmento al origen forma un ángulo α con el eje X. Siguiendo esta analogía podemos definir las funciones coseno y seno para cualquier tipo de ángulo. En la figura 3. 16 se muestran tres ejemplos de las coordenadas asociadas a tres tipos de ángulos, uno agudo, uno obtuso y uno cóncavo.

En particular, para los ángulos de 0°, 90°, 180° y 270° los valores de las tres funciones trigonométricas quedan:

	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tan	0	No definida	0	No definida

De manera similar a las identidades trigonométricas para ángulos complementarios, aquí presentamos las identidades para otras posibilidades:

$\text{sen}(90° + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\text{sen}\, \alpha$	$\tan(90° + \alpha) \times \tan \alpha = -1$
$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\, \alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180° - \alpha) = -\tan \alpha$
$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\, \alpha$	$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan\,(180° + \alpha) = \tan \alpha$
$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\, \alpha$	$\cos\,(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan\,(-\alpha) = -\tan \alpha$

Por último, presentamos las identidades trigonométricas para la suma y resta de ángulos:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\, \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha\, \text{sen}\, \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

En particular, cuando $\alpha = \beta$ obtenemos las fórmulas para ángulos dobles:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Actividad de aprendizaje 11

Deduce las identidades trigonométricas que se piden.

1. Usa la figura 3. 18 junto con congruencia de triángulos para justificar las identidades.

   a. $\text{sen}(90° + \alpha) = \cos \alpha$

   b. $\cos(90° + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

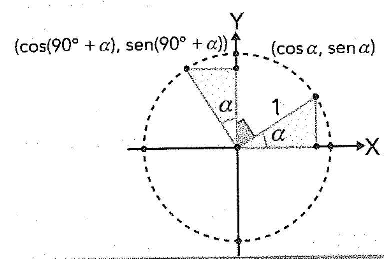


Figura 3.18

2. Usa las identidades trigonométricas junto con las medidas de los ángulos notables para completar la tabla de ángulos notables obtusos.

	sen	cos	tan
120°		$-\frac{1}{2}$	
135°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
150°			$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Usa las identidades trigonométricas de suma y de ángulo doble para justificar la validez de las identidades de ángulo triple:

   a. $\text{sen}(3\alpha) = 3\text{sen}\ \alpha - 4\text{sen}^3\alpha$

   b. $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Ley de senos

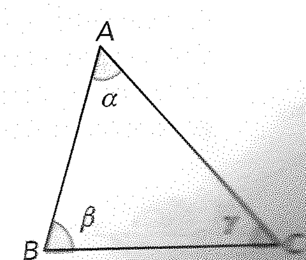
La aplicación de la trigonometría se vería muy limitada si no la pudiéramos aplicar a cualquier tipo de triángulo. Hasta ahora sólo hemos visto situaciones en que aparecen triángulos rectángulos, sin embargo, es posible también encontrar relaciones entre ángulos y lados de cualquier triángulo.

En esta sección veremos la llamada ley de senos que nos ayuda a determinar las medidas de los lados de un triángulo si se conocen sus ángulos y la medida de un lado. En este sentido, la ley de senos sería la versión trigonométrica del criterio ALA de congruencia y semejanza de triángulos.

Ley de senos. En un triángulo ABC se cumple la siguiente relación:

$$\frac{BC}{\text{sen}\alpha} = \frac{AC}{\text{sen}\beta} = \frac{AB}{\text{sen}\gamma}.$$

Por tanto, si se conoce la medida de los ángulos del triángulo y del lado BC, con la ley de senos se puede encontrar los valores de AB y AC.



Ejemplo

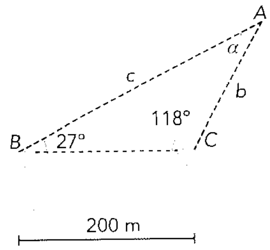


Figura 3.19

Dos torres de control están separadas por una distancia de 200 m. En cierto momento cada torre mide el ángulo de elevación al observar un avión como se muestra en la figura 3.19. ¿A qué distancia está el avión de cada torre?

Empezaremos calculando la distancia entre la torre B y el avión A. Para esto necesitamos antes saber la medida del ángulo en A.

Recuerda que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°. Así, el ángulo en A cumple que $\alpha = 180° - 27° - 118° = 35°$.

Ahora ya podemos aplicar la ley de senos para encontrar la medida de AB. Consideramos:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Y sabemos que $\alpha = 35°$, $\gamma = 118°$ y $BC = 200$ m. Despejando AB y sustituyendo los valores de sen(35°) = 0.573 y sen(118°) =0.883 nos queda:

$$AB = \frac{BC \times \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{200 \times 0.883}{0.573} = 308.20.$$

De la misma manera, podemos encontrar la medida de AC. Consideramos ahora:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\beta}.$$

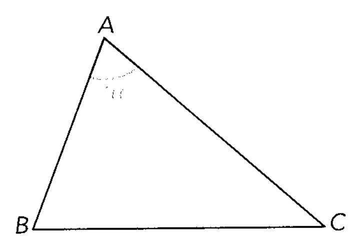
Al despejar AC y sustituir los valores correspondientes obtenemos:

$$AC = \frac{BC \times \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{200 \times 0.454}{0.573} = 158.464.$$

La ley de cosenos nos ayuda a determinar la medida de un lado de un triángulo si se conoce el ángulo opuesto y los otros dos lados. En este sentido, la ley de cosenos es una versión cuantitativa del criterio LAL de congruencia y semejanza de triángulos.

Ley de cosenos. En un triángulo ABC se cumple la relación:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha.$$



Cuando el ángulo α es recto, se tiene cos(90°) = 0 y se recupera el teorema de Pitágoras. Por tanto, podemos considerar a la ley de cosenos como una generalización del teorema de Pitágoras.

Ejemplo

Un faro observa a dos barcos a una distancia de 160 m y de 210 m. Además, mide que el ángulo de separación entre ellos es de 77°. ¿A qué distancia se encuentran los barcos uno del otro?

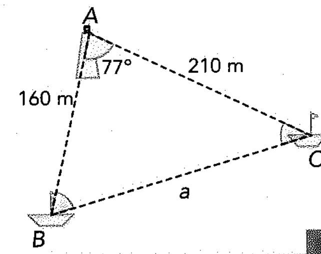


Figura 3.20

Esta es una aplicación directa de la ley de cosenos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha.$$

Basta sustituir los valores correspondientes de $AB = 160$, $AC = 210$ y $\cos\alpha = \cos(77°) = 0.225$, queda:

$$BC^2 = 160^2 + 210^2 - 2 \cdot 160 \cdot 210 \cdot 0.225 = 54580.$$

Así:

$$BC = \sqrt{54580} = 233.624.$$

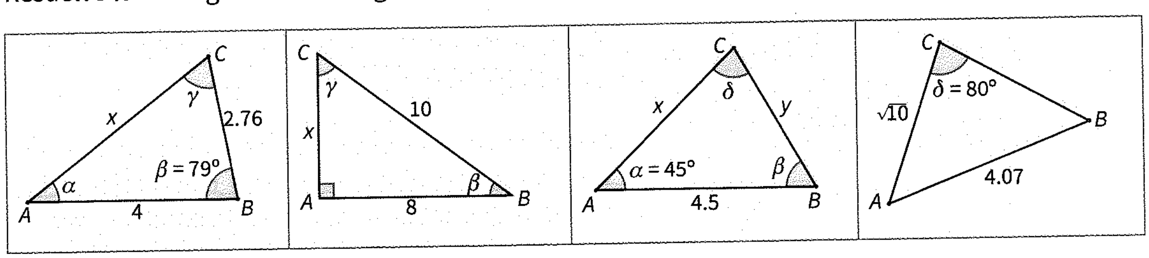
Resolución de triángulos oblicuángulos

Ya vimos cómo las leyes de seno y de coseno nos ayudan a encontrar datos faltantes en un triángulo dependiendo de qué datos se conocen. En esta sección te toca practicar lo aprendido de estas leyes.

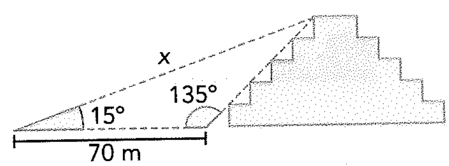
Actividad de aprendizaje 12

Usa lo aprendido en esta unidad para resolver los problemas.

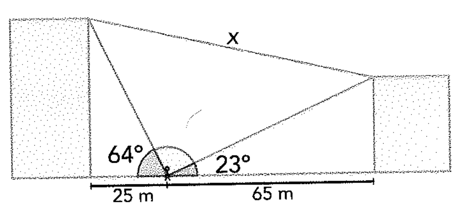
1. Resuelve los triángulos oblicuángulos.

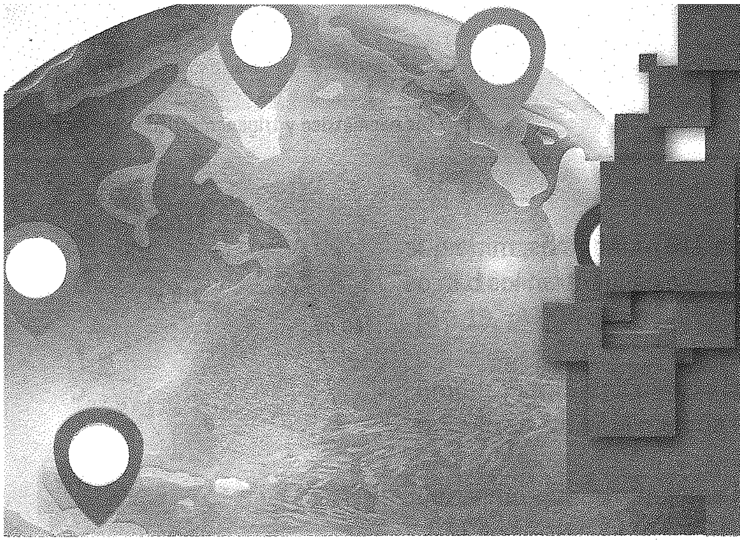


2. Se quiere colocar una rampa con un ángulo de elevación de 15° para facilitar el acceso a la pirámide. Con los datos que se dan, ¿qué longitud deberá tener la rampa?



3. Quique quiere calcular la distancia entre los techos de dos edificios. Para esto se coloca en medio de los dos y mide los ángulos de elevación al observar el techo de cada uno. Con los datos que se dan, ¿cuál es la distancia entre los techos?





Las identidades trigonométricas y sus relaciones

¿Cómo uso las identidades trigonométricas en diversos contextos de ubicación en el espacio, la topografía y la medición?

Veamos más ejemplos de aplicaciones de la trigonometría para medir distancias.

Ejemplo

Distancia sobre la Tierra.

Volvamos al problema de medir distancias sobre la Tierra usando las coordenadas dadas por la longitud y latitud. En el primer parcial aprendimos a calcular distancias que estuvieran sobre el mismo meridiano. Ahora nos fijaremos en ciudades que estén en el mismo paralelo.

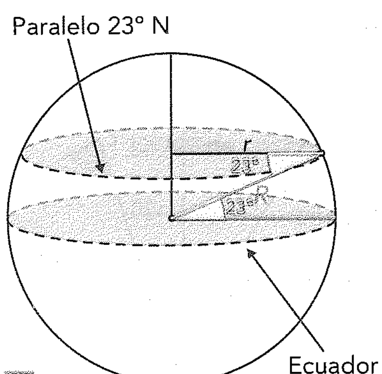


Figura 3.21

La ciudad de La Habana tiene coordenadas 23° 07' N y 83° 23' W, mientras que la ciudad de Mazatlán se encuentra en el paralelo 23° 14' 29'' N y el meridiano 106° 24' 35'' W. ¿Cuál es la distancia entre estas dos ciudades? Recuerda que el radio de la Tierra es de 6 371 km.

Asumimos que las dos ciudades están en el mismo paralelo, vamos a tomar el paralelo 23° N como referencia. Primero tenemos que saber el radio de este paralelo. Para esto precisamente necesitamos de la trigonometría. Observamos que la función coseno hace el trabajo, es decir:

$$\cos 23^\circ = \tfrac{r}{R}.$$

donde r es el radio del paralelo 23° N y R es el radio de la Tierra. De aquí podemos despejar para encontrar la medida de r:

$$r = R \cdot \cos 23^\circ = 6371 \cdot 0.92 = 5861.32.$$

Ahora podemos proceder de la misma manera que en la Unidad 1. La diferencia es que vamos a movernos sobre el paralelo 23°, así, al final habrá que multiplicar la medida de la abertura en radianes por el radio de este círculo y no por el radio de la Tierra.

La abertura en grados de La Habana a Mazatlán es de 106° 24' 35'' – 83° 23' = 23° 1' 35''.

Transformamos primero los minutos y segundos a décimas de grado:

1' = 0.0166 y 35'' = 0.0097.

Así, 23° 1' 35'' = 23.0263°.

Ahora transformamos de grados a radianes, nos queda que 23.0263° equivale a 23.0263° · 3.1416 ÷ 180° = 0.4019 radianes.

Por tanto, la distancia entre La Habana y Mazatlán es de 0.4019 · 5 861.32 = 2 355.66 km.

Actividad de aprendizaje 13

Lee la situación y responde la pregunta.

1. La ciudad de Nueva York se encuentra en el paralelo 40° 40' N y el meridiano 73° 56' W, mientras que la ciudad de Madrid tiene coordenadas 40° 25' 08'' N y 3° 41' 31'' W. Suponiendo que ambas ciudades se encuentran en el paralelo 40°, ¿cuál es la distancia entre ellas?

Para saber más

¿Cómo se mide la distancia entre cualesquiera dos ciudades? Por ejemplo, la Ciudad de México y Madrid. Para esto se necesita trigonometría esférica que es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo dibujado sobre la superficie de una esfera.

Como vimos, la trigonometría es el estudio de las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Hemos visto cómo se aplica en varios contextos para medir distancias. Sin embargo, para que la trigonometría sea realmente útil, es de vital importancia saber los valores de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de todos los ángulos. Afortunadamente, contamos con la calculadora, pero antes de su invención era necesario elaborar tablas que listaran los valores de las funciones trigonométricas para la mayor cantidad de ángulos posible.

Pero, ¿cómo se crearon esas tablas? A continuación presentamos un método para calcular seno y coseno del ángulo de 3°.

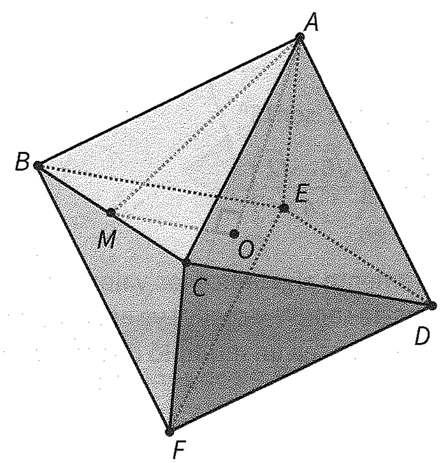
Ejemplo

Obtendremos los valores de sen(3°) y cos(3°) sin calculadora.

Para ello seguiremos varios pasos.

1. La idea es obtener primero los valores de seno y coseno para los ángulos de 15° y 18° y luego usar la identidad trigonométrica para resta de ángulos.

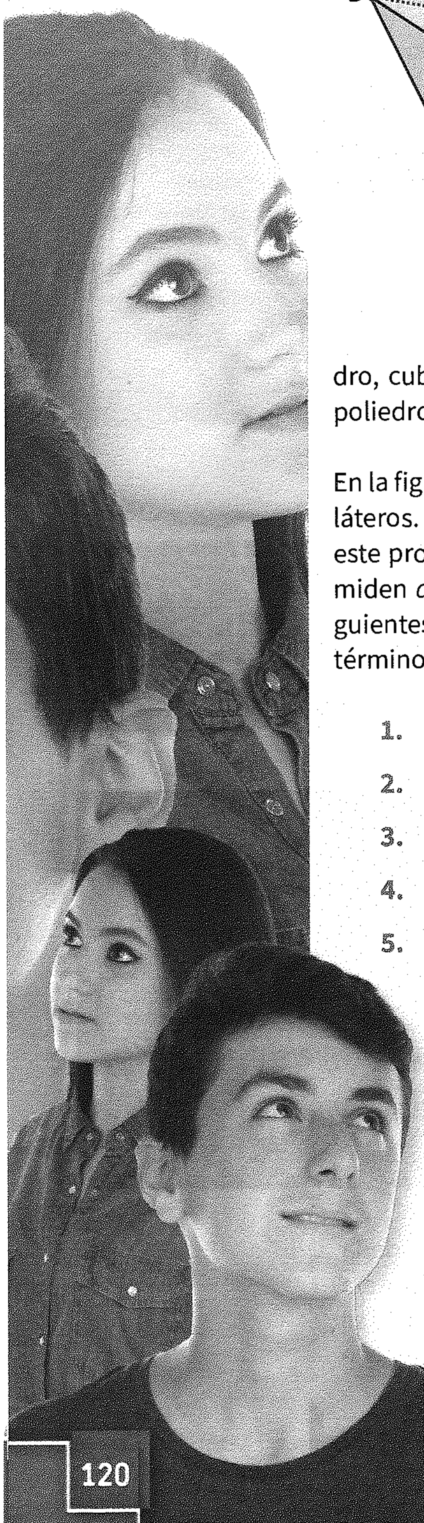
Proyecto integrador



El proyecto tiene como objetivo integrar los conocimientos del primer parcial en una actividad. Desarrolla lo que se pide y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

En el tercer parcial estudiamos trigonometría. Vamos a usar esta herramienta junto con varios conocimientos aprendidos en este libro para explorar un poco la geometría tridimensional.

En tres dimensiones nos encontramos con los poliedros. Aquellos cuyas caras son polígonos regulares les llamamos poliedros regulares. Sorprendentemente sólo hay cinco poliedros regulares convexos, también conocidos como sólidos de Platón: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. ¿Puedes imaginarte por qué ya no hay más poliedros regulares?



En la figura se observa al octaedro, éste se obtiene al pegar las aristas de ocho triángulos equiláteros. Observamos entonces que el octaedro tiene ocho caras, 12 aristas y seis vértices. En este proyecto vas a deducir la fórmula para el volumen de un octaedro regular cuyas aristas miden a y vas a calcular la medida de los ángulos que se forman. Para ello contesta las siguientes preguntas. Todas las medidas de segmentos, áreas y volúmenes te deben quedar en términos de a, sin embargo los ángulos no van a depender de a (¿por qué?)

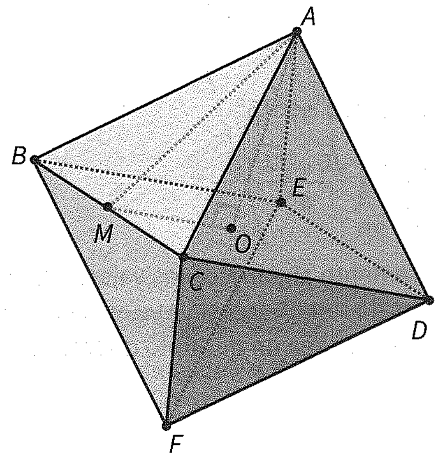
1. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *BCDE*? ¿Cuál es su área en términos de a?
2. Usa que *ABC* es un triángulo equilátero para calcular la medida de *AM*.
3. ¿Cuál es el área de todas las caras del octaedro *ABCDEF*?
4. ¿Cuánto mide *OM*? Ahora usa el teorema de Pitágoras para encontrar la medida de *AO*.
5. ¿Cuál es el volumen de la pirámide *ABCDE*?
6. ¿Cuál es el volumen del octaedro *ABCDEF*?

Ahora nos vamos a fijar en los ángulos:

1. ¿Cuánto vale sen (*AMO*)? Usa una calculadora científica para evaluar la función sen^{-1} en el valor que obtuviste. El resultado es la medida del ángulo $\angle AMO$.
2. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle AMF$? A este se le conoce como ángulo diedro del octaedro.
3. Usa las mismas ideas vistas acá para hallar la fórmula de volumen de un tetraedro regular en función de la medida de una de sus aristas. Así mismo calcula la medida de su ángulo diedro.

CIERRE

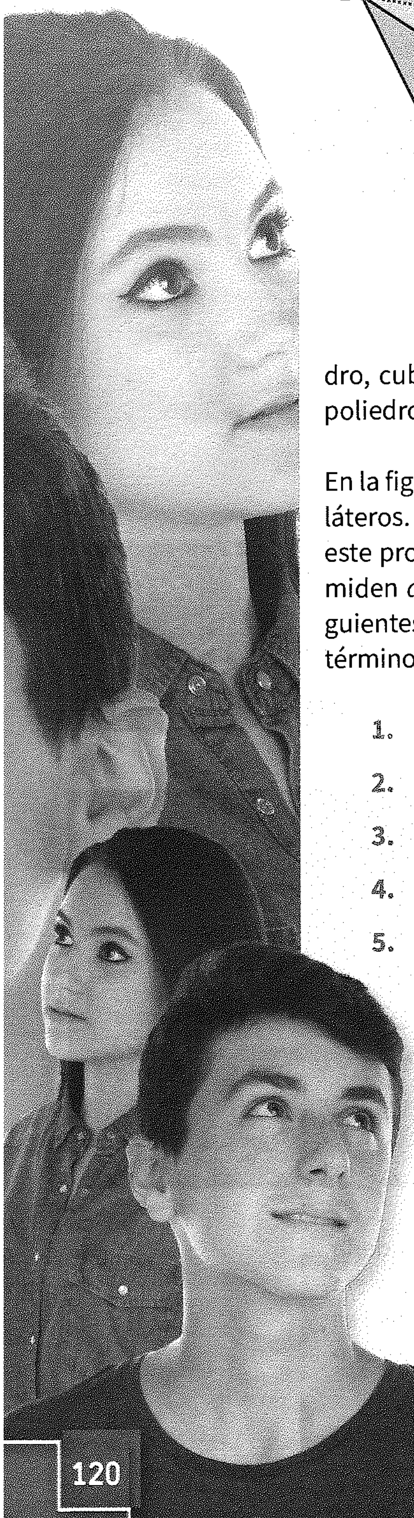
Proyecto integrador



El proyecto tiene como objetivo integrar los conocimientos del primer parcial en una actividad. Desarrolla lo que se pide y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

En el tercer parcial estudiamos trigonometría. Vamos a usar esta herramienta junto con varios conocimientos aprendidos en este libro para explorar un poco la geometría tridimensional.

En tres dimensiones nos encontramos con los poliedros. Aquellos cuyas caras son polígonos regulares les llamamos poliedros regulares. Sorprendentemente sólo hay cinco poliedros regulares convexos, también conocidos como sólidos de Platón: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. ¿Puedes imaginarte por qué ya no hay más poliedros regulares?

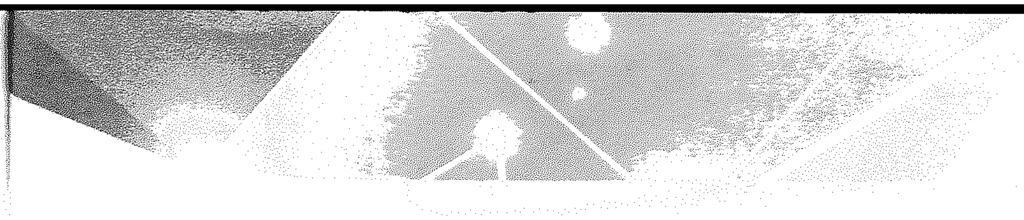


En la figura se observa al octaedro, éste se obtiene al pegar las aristas de ocho triángulos equiláteros. Observamos entonces que el octaedro tiene ocho caras, 12 aristas y seis vértices. En este proyecto vas a deducir la fórmula para el volumen de un octaedro regular cuyas aristas miden a y vas a calcular la medida de los ángulos que se forman. Para ello contesta las siguientes preguntas. Todas las medidas de segmentos, áreas y volúmenes te deben quedar en términos de a, sin embargo los ángulos no van a depender de a (¿por qué?)

1. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *BCDE*? ¿Cuál es su área en términos de a?
2. Usa que *ABC* es un triángulo equilátero para calcular la medida de *AM*.
3. ¿Cuál es el área de todas las caras del octaedro *ABCDEF*?
4. ¿Cuánto mide *OM*? Ahora usa el teorema de Pitágoras para encontrar la medida de *AO*.
5. ¿Cuál es el volumen de la pirámide *ABCDE*?
6. ¿Cuál es el volumen del octaedro *ABCDEF*?

Ahora nos vamos a fijar en los ángulos:

1. ¿Cuánto vale sen (*AMO*)? Usa una calculadora científica para evaluar la función sen^{-1} en el valor que obtuviste. El resultado es la medida del ángulo $\angle AMO$.
2. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle AMF$? A este se le conoce como ángulo diedro del octaedro.
3. Usa las mismas ideas vistas acá para hallar la fórmula de volumen de un tetraedro regular en función de la medida de una de sus aristas. Así mismo calcula la medida de su ángulo diedro.



Hacia la prueba Planea

Utiliza esta sección para preparar tu prueba Planea.

1. Se define como la razón entre el cateto opuesto al ángulo a y la hipotenusa.

   a. $\cos \alpha$

   b. $\operatorname{sen} \alpha$

   c. $\tan \alpha$

   d. $\sec \alpha$

2. De las igualdades identifica la que es falsa.

   a. $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$

   b. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

   c. $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

   d. $\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

3. Si $x = y$, entonces $\cos(x + y)$ es equivalente a:

   a. $2\operatorname{sen}x\cos x$

   b. $\cos^2x + \operatorname{sen}^2x$

   c. $-2\operatorname{sen}x\cos x$

   d. $\cos^2x - \operatorname{sen}^2x$

4. Si la función sen x oscila entre 1 y −1, entonces el rango de la función sen $2x$ es:

   a. 1 y −1

   b. 2 y −2

   c. 0.5 y −0.5

   d. 4 y −4

5. Si la función cos x oscila entre 1 y −1, entonces el rango de la función $2\cos x$ es:

   a. 1 y −1

   b. 2 y −2

   c. 0.5 y −0.5

   d. 4 y −4

6. Si $\cos x = 1$, entonces x siempre tiene la forma:

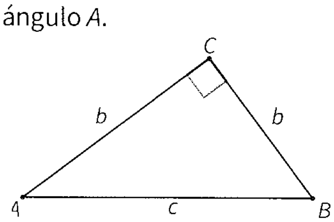
   a. $n\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

   b. $2n\pi$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

   c. $\frac{n\pi}{2}$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

   d. $-\frac{n\pi}{2}$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

7. Con base en la figura halla el valor del ángulo A.



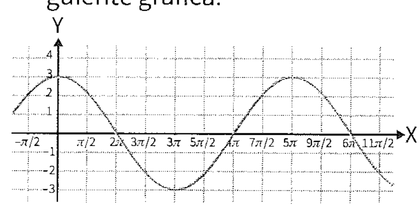
   a. 110°

   b. 100°

   c. 90°

   d. 80°

8. Determina la función que tiene la siguiente gráfica.



   a. $2\cos(3x)$

   b. $3\cos(2x)$

   c. $2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

   d. $3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar qué dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Calcular el valor del seno de 30°.	Mi trabajo refleja mi comprensión del concepto “función seno”.		
	Conozco el valor de la función trigonométrica seno, calculada en 30°°.		
	Apliqué adecuadamente la función trigonométrica en el problema resuelto.		
Argumentar por qué el coseno de 45° y el seno de 45° son iguales, pero el seno de 30° y el coseno de 30° son distintos entre sí.	Mi argumentación es clara y basada en fuentes matemáticas.		
	Mi trabajo presentado es ordenado y limpio. Muestra buena ortografía.		
	Mi trabajo presenta ejemplos e imágenes para reforzar mi argumentación.		
Estimar el valor de $\text{sen}^2x + \cos^2x$.	Estimé el valor de la expresión $\text{sen}^2x + \cos^2x$		
	Mis conclusiones presentan la relación con el teorema de Pitágoras.		
	Mi trabajo muestra ejemplos en los que utilizo la identidad trigonométrica $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$.		