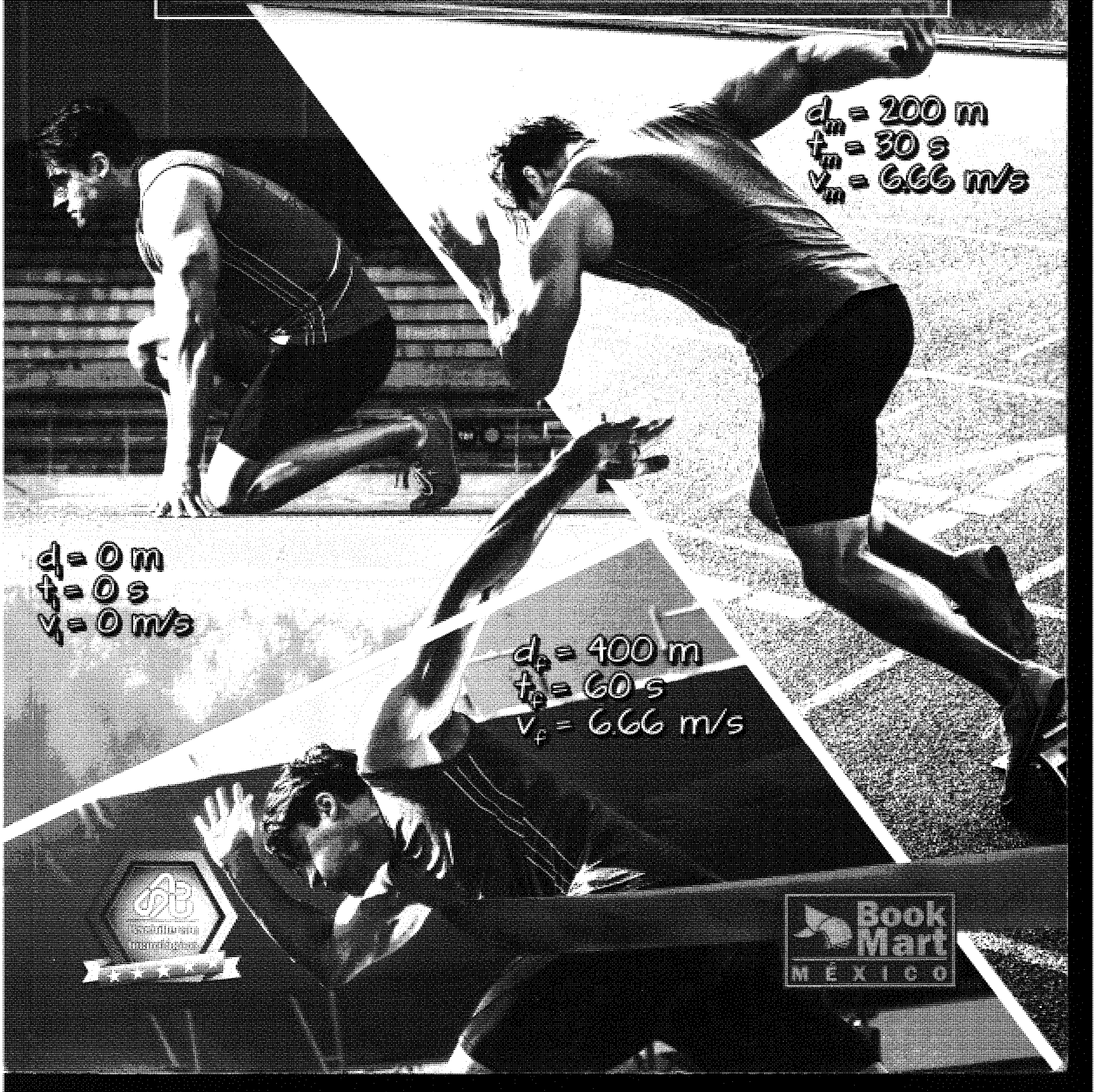
Faustino Agustín Romano Velázquez

Cálculo diferencial

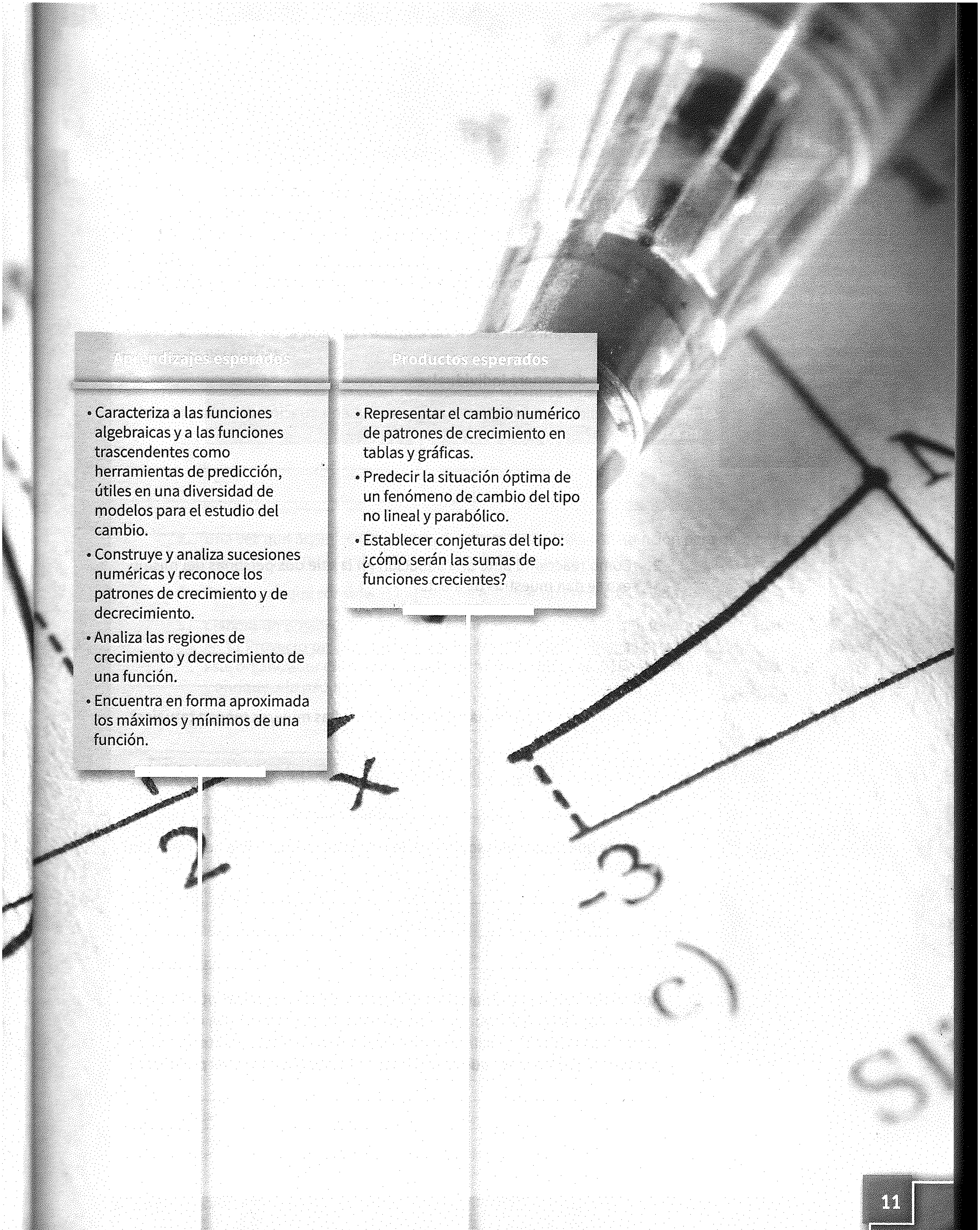


Book Mart
MÉXICO

Primer parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

Componentes	Contenidos centrales	Contenidos específicos
• Cambio y predicción: elementos del cálculo.	• Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición. • Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.	• El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio? ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué, la variación? • Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. Si una función pasa de crecer a decrecer, ¿hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?



Aprendizajes esperados

- Caracteriza a las funciones algebraicas y a las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.
- Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.
- Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.

Productos esperados

- Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas.
- Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico.
- Establecer conjeturas del tipo: ¿cómo serán las sumas de funciones crecientes?

Revisando mis prejuicios

Nuestro objetivo

Reflexionar sobre los prejuicios que tenemos para adoptar una perspectiva más integral e incluyente.

Paso a paso

- **Responde de manera individual:**

1. ¿Qué siento cuando veo a una persona en situación de calle pidiendo dinero?

2. ¿Cómo reacciono ante una situación en la que dos personas del mismo sexo se dan muestras de afecto?

3. ¿Considero negativo para la sociedad que las mujeres tengan tatuajes?

4. ¿Ante qué situaciones soy menos tolerante cuando se habla de diversidad humana?

- **Reflexiona sobre las situaciones expuestas. Puedes analizar otras que te causan conflicto. Analiza: ¿por qué piensas de esa forma? ¿De dónde has tomado esas ideas? ¿Facilitan u obstaculizan tu contacto y trato con otras personas? ¿Cómo crees que esas personas se sienten ante esos prejuicios?**

Para reflexionar

¿Alguna vez has discriminado a alguna persona por ser diferente a ti?

¿Piensas que una persona debería ganar menos por su género o tono de piel?

¿Has revisado qué tipo de prejuicios tienes?

Para terminar

¿Cómo seré una mejor persona? ¿Cómo seremos una mejor comunidad?

Recuerda que la aceptación y respeto a las personas diferentes a nosotros implica identificar y desarticular nuestros propios prejuicios. La toma de perspectiva ante situaciones como éstas nos ayuda a elevar nuestro nivel de tolerancia para asumir una actitud inclusiva ante las personas, sin importar su sexo, edad, identidad, creencias, etcétera.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

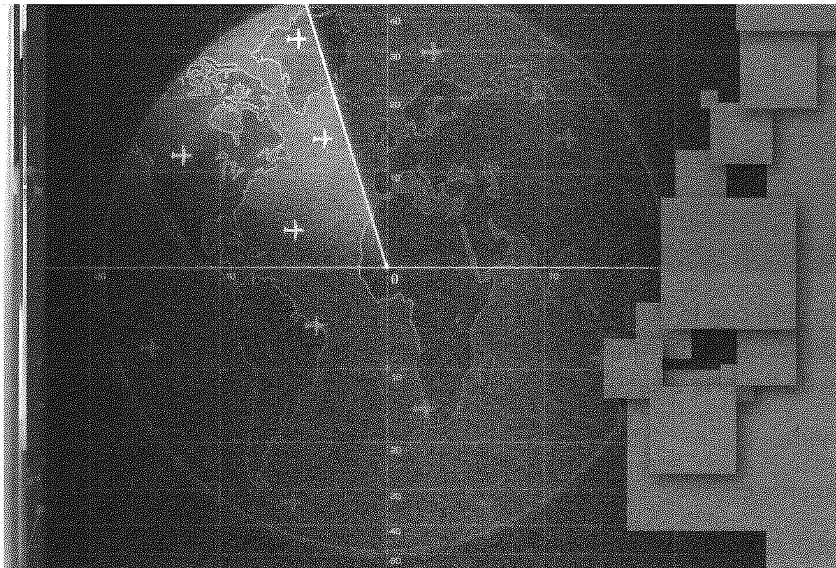
1. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



DESARROLLO

Conceptos básicos del sistema de coordenadas, orientación y posición.

El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas

TIC

Te presentamos un artículo sobre el cambio en la estatura de las personas a través del tiempo.

bkmrt.com/KL2mMi

Seguramente alguna vez has escuchado la expresión: "qué rápido pasa el tiempo", y casi siempre viene acompañada de "cómo han cambiado las cosas". El tiempo transcurre y las cosas a nuestro alrededor cambian, algunas no son cuantificables, por ejemplo, tus gustos, emociones o ideas y otras sí, como tu estatura o peso. Los cambios suceden en todos lados y en todas situaciones, por ejemplo:

Figura 1.1

Golden Gate.

1. Tu estatura ha cambiado desde el momento en que naciste y seguirá cambiando conforme transcurra el tiempo.
2. Si elaboras un pastel, conforme más o menos azúcar le pongas, vas a hacer que su sabor cambie, puede quedar muy bueno o muy malo.
3. Si viajas por carretera, la distancia recorrida cambiará, según las horas que lleves viajando.
4. El tiempo de vida de una construcción dependerá de la calidad de los materiales que se usen.

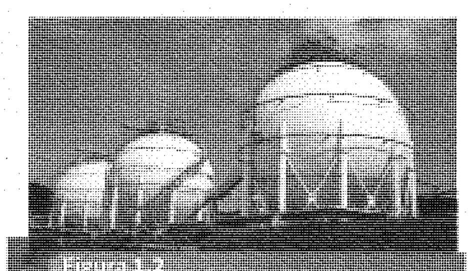


Figura 1.2

Contenedores de gas propano.

Como te das cuenta, las relaciones de cambio están presentes en todos lados y por eso es importante estudiarlas. A un ingeniero le interesa garantizar que su obra perdurará muchos años, y a un químico encargado de controlar gases peligrosos, le interesa asegurar que su presión es constante; entre otros casos.

En este parcial aprenderás cómo las matemáticas ayudan a entender estos procesos de cambio y cómo se pueden plantear y visualizar de forma concreta.

El cambio visto en tablas

Una manera muy sencilla de estudiar el cambio es a través de tablas, veamos un ejemplo concreto. Consideremos el caso de Luis, un alumno de bachillerato, a quien, sin falta, al menos una vez al año, su mamá le mide la estatura para guardar un recuerdo de cómo crece, su estatura ha sido la siguiente:

Edad	Estatura	Edad	Estatura	Edad	Estatura
1 año	76 cm	6 años	113.2 cm	11 años	141.8 cm
2 años	88 cm	7 años	119.4 cm	12 años	146.3 cm
3 años	96.5 cm	8 años	125.2 cm	13 años	152.7 cm
4 años	100.13 cm	9 años	131.2 cm	14 años	160 cm
5 años	106.40 cm	10 años	136.5 cm	15 años	167.1 cm

Puedes ver que hay dos parámetros en la tabla anterior: el tiempo representado por la edad de Luis y su estatura. Además, la estatura depende de la edad que tiene Luis. En general, este es un aspecto que comparten todas las situaciones de cambio, un parámetro que varía libremente (tiempo en el ejemplo anterior) y otro que depende del primer parámetro (estatura).

En matemáticas, el concepto que nos permite estudiar esto es el de función, pero, antes de presentarlo, es necesario que conozcas qué es una relación.

Dados dos conjuntos, digamos A y B, una **relación** R es un subconjunto del producto cartesiano de A con B, es decir:

$$R \subseteq A \times B.$$

Recuerda que el producto cartesiano de dos conjuntos se define así:

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

La expresión $a \in A$ se lee como "a pertenece al conjunto A".

Si damos un elemento $a \in A$ y un elemento $b \in B$, diremos que a se relaciona con b si la pareja (a, b) es un elemento de R. En el ejemplo anterior tenemos que:

- A es el conjunto de edades de Luis, es decir, $A = \{1 \text{ año}, 2 \text{ años}, 3 \text{ años}, \ldots, 15 \text{ años}\}$.
- B es el conjunto de estaturas de Luis, es decir, $B = \{76 \text{ cm}, 88 \text{ cm}, \ldots, 167.1 \text{ cm}\}$.

La relación R es la de tiempo-estatura, así, la pareja (1 año, 76 cm) debe estar en la relación, ya que, cuando tenía un año medía 76 cm y la pareja (1 año, 167.1 cm) no está en la relación ya que cuando tenía un año no medía 167.1 cm, de hecho, es imposible para un humano promedio.

Como te das cuenta, las relaciones son muy sencillas de entender, veamos ahora el concepto de función.

> Una relación R es una **función** si para cada elemento $a \in A$, hay un solo elemento $b \in B$, tal que la pareja (a, b) es un elemento de R.

En nuestro ejemplo, la relación tiempo-estatura es una función, no hay ningún año donde midiera dos cantidades distintas.

Ejemplo

Un ingeniero vigila el volumen de un gas que se almacena en un contenedor con una presión constante. A lo largo del día, la temperatura varía y el ingeniero reporta lo siguiente:

Temperatura	9 °C	10 °C	12 °C	15 °C
Volumen	99.646 cm^3	100 cm^3	100.706 cm^3	101.765 cm^3

En este caso, la relación está dada por temperatura-volumen y, como puedes notar, es una función, cada temperatura tiene una sola medición de volumen. Este es un caso particular de la ley de gases ideales, más adelante encontrarás otros ejemplos de esta ley.

Actividad de aprendizaje 1

Con base en lo visto, responde.

1. En el ejemplo de la edad de Luis, vimos que el elemento $(1, 76) \in R$. Escribe en tu cuaderno, por extensión todos los elementos de R.
2. Determina si estas relaciones son funciones.
   a. Cada persona con su fecha de nacimiento.
   b. Los nombres con las personas.
   c. Edad con peso.
   d. Abecedario con la primera letra del nombre de cada estado de México.
3. Elabora al menos dos funciones entre los siguientes conjuntos:
   a. {meses} y los naturales.
   b. {personas} y los reales.
   c. {animales} y los reales.

El cambio visto en gráficas

Imagina que estudias cierto fenómeno, por ejemplo, la relación **costo-beneficio** de una gran empresa. Tener una tabla con miles de datos de costos y beneficios parece muy difícil de manipular y asimilar, por esto, debemos encontrar una manera fácil de entender toda la información sin tener que escribir todo.

Antes de ver la formulación concreta, regresemos con el caso de Luis. Su mamá, por nostalgia, hizo una imagen que representara cómo ha crecido su hijo a lo largo de los años, para ello decidió hacer lo siguiente (figura 1.3).

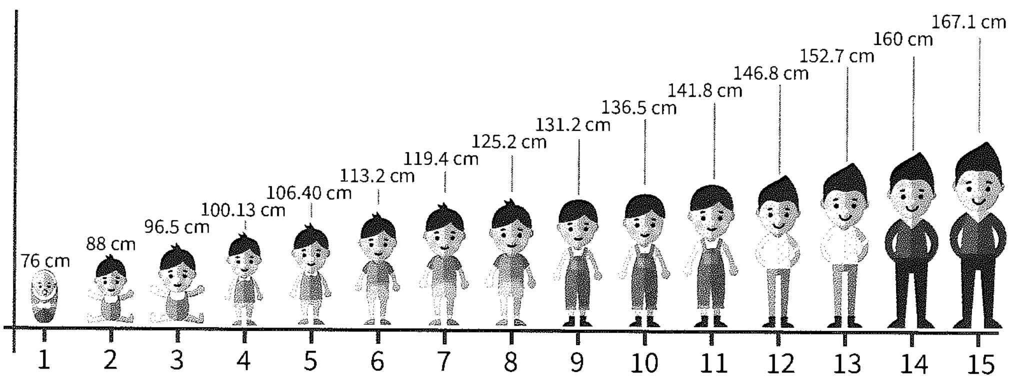


Figura 1.3

Dibujó una con la que donde representa el tiempo y marcó las distintas edades de Luis, luego por cada año, puso un retrato distinto de Luis. Es claro el cambio que tuvo Luis hasta sus 15 años con respecto a la estatura.

Cuando trabajamos con otras situaciones de cambio, hacer una gráfica es la manera más sencilla de analizar su comportamiento. En este libro sólo trabajaremos con relaciones que se dan entre números reales, así que, todo lo haremos pensando en esos casos, aunque existen otras relaciones más complejas.

Si tienes una tabla donde está expresada una relación de cambio entre el conjunto A y el conjunto B debes hacer lo siguiente:

1. Dibuja un plano cartesiano.
2. Tus elementos de A van a ser elementos del eje X y los elementos de B serán elementos del eje Y. Así, cada entrada de tu tabla representará una coordenada (x, y) de tu plano cartesiano.
3. Pon un punto en el plano por cada pareja (x, y) que tengas.

Ejemplo

Consideremos el caso del ingeniero que supervisa un gas almacenado. Sigamos las instrucciones anteriores con este ejemplo.

Glosario

Costo.
Es el gasto económico que representa la fabricación de un producto o la prestación de un servicio.

Beneficio.
Cantidad de dinero que se gana, especialmente con una inversión.

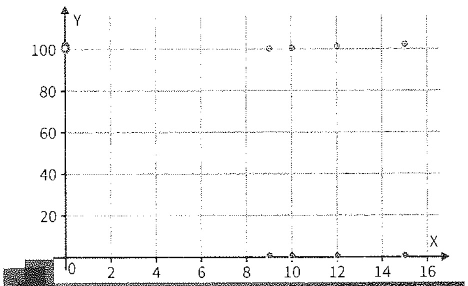


Figura 1.4

1. Dibujamos nuestro plano cartesiano.
2. En el eje X colocamos cuatro marcas de color verde, una por cada temperatura. En el eje Y hacemos lo mismo, pero con el volumen.
3. Las parejas que formamos son: (10, 100), (15, 101.765), (9, 99.646) y (12, 100.706). Marcamos en la gráfica esos puntos con color azul (figura 1.4).

Actividad de aprendizaje 2

Productos esperados

Resuelve los ejercicios, anotando en tu cuaderno lo que sea necesario.

1. Traza en tu cuaderno la gráfica de las estaturas de Luis. ¿Se parece al esquema que elaboró su mamá?
2. Durante septiembre de 2017, el precio medio del dólar fue:

1	\$17.76	11	\$17.52	21	\$17.61
2	\$17.75	12	\$17.56	22	\$17.63
3	\$17.75	13	\$17.6	23	\$17.62
4	\$17.72	14	\$17.61	24	\$17.60
5	\$17.75	15	\$17.6	25	\$17.71
6	\$17.67	16	\$17.54	26	\$17.79
7	\$17.5	17	\$17.52	27	\$17.96
8	\$17.5	18	\$17.5	28	\$18.01
9	\$17.4	19	\$17.58	29	\$18.05
10	\$17.5	20	\$17.6	30	\$18.03

Con esta información, elabora una gráfica en una hoja de papel milimétrico.

¿Cómo represento el cambio?

Como puedes ver, por los ejemplos estudiados, las relaciones de cambio están presentes en todos los aspectos: ingeniería, química, finanzas, salud, etcétera, así que es muy importante saber cómo podemos representarlas de forma clara y correcta.

Siempre que hablamos de cambio debemos dejar claro qué con respecto a quién. A partir de este momento, todas las relaciones de cambio que estudiaremos serán funciones y, además, todas las funciones serán entre números reales.

Como recordarás, una función es un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos A y B, tal que, para cada elemento $a \in A$, hay un solo elemento $b \in B$, y la pareja (a, b) es un elemento de R.

En este contexto, al conjunto A le llamaremos el dominio de la función y al conjunto B el contradominio. Observa que al tener una relación de cambio de B con respecto a A, estamos diciendo que hay una función cuyo dominio es A y contradominio B.

Ahora veamos cómo expresar una función cuyo dominio es A y contradomino B.

1. **Por extensión.** Una manera (poco práctica y muchas veces imposible) es hacer explícita la función, detallando todos los elementos del producto cartesiano de A y B.

Ejemplo

Considera la función cuyo dominio y contradominio son los números naturales y su regla de correspondencia es multiplicar por dos los elementos del dominio. De esta manera, a 1 le corresponde el 2, ya que $2 = 2 \cdot 1$, a 2 le corresponde el 4, y así sucesivamente. La función F por extensión sería:

$$F = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \ldots\}.$$

Con ese simple ejemplo puedes observar que expresar una función por extensión es muy poco práctico, ya que dicha extensión puede tener infinitos números.

2. **Por comprensión.** La manera más usual de expresar una función es usando una condición y en este libro, usualmente esa condición será un polinomio.

Ejemplo

Veamos cómo expresar el ejemplo anterior. En este caso, el dominio y contradominio es el conjunto $\mathbb{N}$, el de los números naturales, por lo tanto, la función por comprensión se expresará como:

$$F = \{(n, 2n) | n \in \mathbb{N}\}.$$

En este ejemplo, vemos que por comprensión es más compacto hacer una descripción de la función.

3. Existe una tercera forma, aunque en realidad es una manera alternativa del punto anterior. Imagina que tienes una función con dominio A y contradominio B. Vamos a escribirla por comprensión:

$$F = \{(a, b) | a \in A, b \in B \text{ y } b = f(a)\},$$

donde hemos llamado a f como la condición que relaciona los elementos del dominio A con los del contradominio B.

TIC

En este libro, el número cero no es un natural.

Entre matemáticos es un tema de polémica decidir si cero es o no un natural. Consulta el artículo que proponemos. ¿Tú qué opinas?

bkmrt.com/ROxLyJ

Para saber más

El conjunto de los números naturales lo denotaremos por $\mathbb{N}$.

El conjunto de los números enteros lo denotaremos por $\mathbb{Z}$.

El conjunto de los números reales lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

La manera más usual de escribir una función es:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a). \end{aligned}$$

Así, estamos diciendo que la variable es a y $f(a)$ es la condición que depende de a. Lo usual es que si el problema se relaciona con el tiempo, usemos la variable t, si se relaciona con los naturales, a la variable n, y si se relaciona con números reales, simplemente x.

Ejemplos

1. Ya habíamos expresado la función de tomar el doble de un número por extensión, la cual era:

$$\{(n,\ 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Observa que ese conjunto es el mismo que $\{(n,\ m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in N \text{ y } m = 2n\}$. Por lo tanto, es claro que la función "tomar el doble" se puede expresar como:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

2. Imaginemos que tenemos un gas ideal, tal que, a 100 °C tiene un volumen de 100 cm^3. Si mantenemos la presión constante, ¿cómo varía el volumen respecto a la temperatura?

De tus cursos de química, recordarás que la ley de gases ideales te permite relacionar la presión, temperatura, volumen y moles de gas a través de una ecuación. En este caso, dado que ni los moles de gas ni la presión cambian, la ley de gases ideales nos dice que:

$$v = (t + 273.15)(0.35316).$$

Donde v es la presión y t es la temperatura, expresada en grados centígrados. Como vemos, esta expresión relaciona los cambios de temperatura t con el volumen v. Así que la función que expresa cómo varía el volumen respecto a la temperatura es:

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t + 273.15)(0.35316). \end{aligned}$$

¿Qué sucede si tomamos los valores de t igual a 10, 9, 15 y 12 grados? Para resolver la pregunta sólo debemos ver nuestra función:

$$10 \mapsto (10 + 273.15)(0.35316) = 99.997 \qquad 9 \mapsto (9 + 273.15)(0.35316) = 99.644$$

$$15 \mapsto (15 + 273.15)(0.35316) = 101.763 \qquad 12 \mapsto (12 + 273.15)(0.35316) = 100.703$$

¿Recuerdas esas expresiones? Son aproximadamente las mismas que obtuvo el ingeniero vigilando el gas. De esta manera, el ingeniero podría corroborar que sus mediciones fueron correctas y que los sistemas funcionan bien.

Observa que aunque hemos cambiado la presentación de una relación de extensión a comprensión sigue siendo lo mismo, así que para graficarla es igual que antes. Si tienes una relación por comprensión, sólo debes tomar algunos puntos y graficarlos, mientras más puntos tengas, mejor será tu gráfica.

En el ejemplo de antes, la función era:

$$\begin{aligned} v &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t+273.15)(0.35316). \end{aligned}$$

Consideremos algunos puntos, elaboremos una tabla, como sigue, y con esos puntos trazamos la gráfica que se muestra en la figura 1.5:

Valor de t	Valor de v
0	96.465
5	98.231
10	99.997
15	101.763
20	103.528

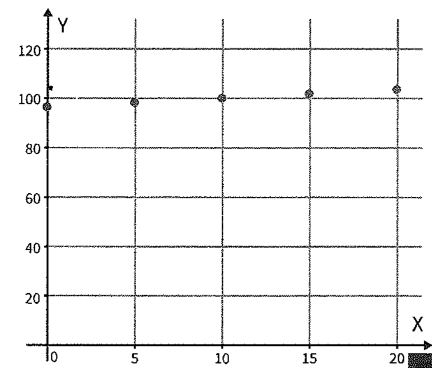


Figura 1.5

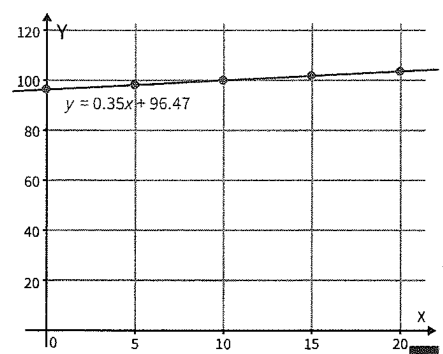


Figura 1.6

Si tomamos más puntos, nuestra gráfica sería mejor, pero en este caso no es necesario. Observa que:

$$(t+273.15)(0.35316) = t(0.35316) + 96.4656.$$

De tu curso de Geometría analítica puedes darte cuenta que esta ecuación corresponde a una línea recta con pendiente 0.35316 y que pasa por el punto (0, 96.456), así que, todos los puntos que queremos van a estar sobre una línea recta.

Con esto, podemos concluir que la gráfica es el dibujo de la derecha (figura 1.6).

Actividad de aprendizaje 3

Responde para reforzar lo aprendido.

1. Una pequeña empresa ha pronosticado que sus ganancias g (en millones de pesos) respecto al tiempo t (en años) van a estar dadas por la ecuación $g = 0.1t + 0.23$.

   a. ¿Cuáles serán sus ganancias en 1, 5, 10 y 20 años?

   b. Grafica en tu cuaderno la función.

2. Un ingeniero está vigilando un gas, sabe que la temperatura nunca cambia y que, a 2 atmósferas de presión su volumen es de 50 cm^3, además, sus mediciones son:

Presión	1.5 atm	1.8 atm	2 atm	2.2 atm
Volumen	66.66 cm^3	55.55 cm^3	50 cm^3	54.5454 cm^3

3. Usa la ley de gases ideales para elaborar la relación presión-volumen y grafícala. ¿Qué conclusión puedes sacar de la función y de las mediciones del ingeniero?

¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo?

Un problema clásico, y que ha motivado el avance de las ciencias, es describir de manera clara y precisa cómo se mueve un objeto con respecto al tiempo. Planteemos y estudiemos este problema.

Figura 1.7

Tenemos una relación entre el tiempo y la posición de un objeto, por simplicidad, imaginemos que somos el objeto. Además, sabemos que justo al inicio, es decir, cuando $t = 0$, estamos parados en un sitio, ¿si en este momento te pararas y te olvidaras del aula, de los edificios, de los árboles, de todo, qué apreciarías? La respuesta es un plano.

Por lo anterior, podemos imaginar que nos movemos en el plano. Date cuenta de algo, en un momento determinado estarás en un único sitio, no puedes estar en dos sitios al mismo tiempo. Resulta que la relación entre tiempo y posición es sólo una función entre los números reales, es decir, su gráfica está en el plano cartesiano.

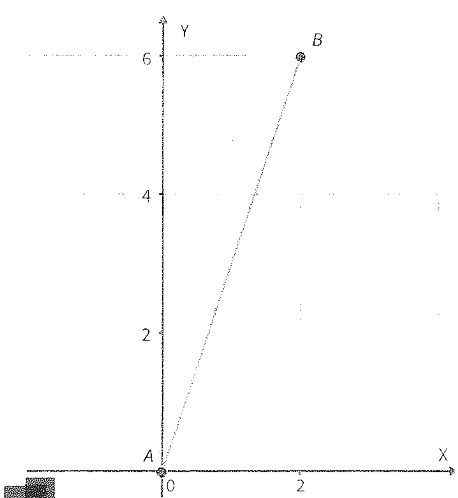


Figura 1.8

Una pregunta natural es: ¿siempre podemos hacer una descripción total de la función del movimiento? Y desafortunadamente la respuesta es no, el movimiento puede ser muy caótico, aun así, hay muchos ejemplos clásicos destacables, y en la práctica, aunque no podamos dar la función del movimiento hay técnicas (que no veremos en este curso) para aproximar la función.

Ejemplo

1. **Movimiento lineal.** Imagina que decides empezar a caminar en línea recta en dirección a un punto. En este caso, la función está descrita por la ecuación de una línea recta, algo que ya viste en tus cursos de geometría analítica. Ver figura 1.8.

2. **Caída libre.** Imagina que estás parado en un edificio de 30 metros de altura y dejas caer una pelota. ¿Cuál es la función que describe su altura respecto al tiempo?

   De tus cursos de física recordarás la ecuación de caída libre, que en este caso satisface: $h = 30 - 0.5(9.8)t^2$. Ver figura 1.9.

3. **Tiro parabólico.** Tienes un arco y lanzas una flecha con un ángulo de inclinación de 45°, la cual sale a 27.77 m/s. ¿Cómo describimos su movimiento?

   Como antes recurrimos a la física y, usando las ecuaciones de tiro parabólico, obtenemos que su elevación está dada por: $h = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$ y su desplazamiento se expresa: $d = 19.63t$. Ver figura 1.10.

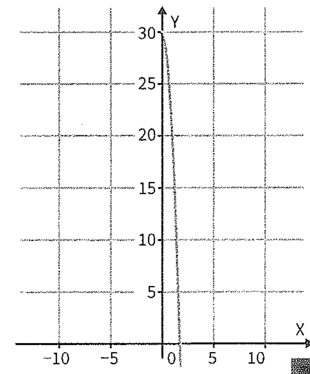


Figura 1.9

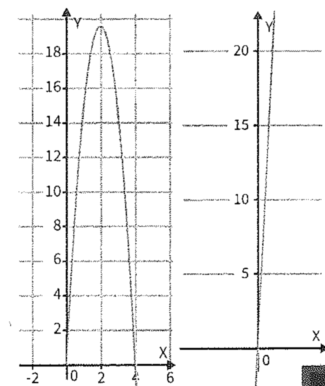


Figura 1.10

Actividad de aprendizaje 4

Productos esperados

Elabora en tu cuaderno las funciones y las gráficas que describan las situaciones. Ten presente la definición de función para esta actividad.

1. La función que toma el triple de un número y le resta el cuadrado del mismo.
2. La función que describe cómo se mueve un objeto que se traslada en línea recta, pasa por el origen y tiene una pendiente de 0.5.
3. La función que describe la caída libre de un objeto desde un edificio de 100 metros de altura.
4. ¿Cómo se desplaza y cuál es la altura de una bala de cañón que se dispara con un ángulo de inclinación de 60° y con una velocidad inicial de 80 m/s?
5. Lo mismo que el ejercicio anterior, pero ahora el ángulo es 45° y posteriormente 30°. ¿Puedes decir con cuál ángulo la bala alcanza una mayor altura y recorre una mayor distancia?

¿Qué es el cambio y qué es la variación?

Hemos hablado del cambio, pero te has preguntado ¿cómo cambia el cambio? Imaginemos el caso de Luis, del inicio de este parcial. Es claro que cambió mucho de cuando tenía tres años a cuando tenía 13, pero, ¿qué tanto cambió? Como estábamos hablando de su estatura, resulta natural comparar sus estaturas: a los tres años medía 96.95 cm y a los 13 años medía 152.7 cm, ¿qué tanto cambió Luis?, dado que hablamos de su estatura, la pregunta es, ¿qué tanto creció Luis? Esta pregunta es sencilla de responder, Luis creció 152.7 cm − 96.95 cm = 55.75 cm.

Como te has dado cuenta, para formular de manera correcta el cambio y la variación fueron necesarias dos cosas:

1. Entender el cambio de quién con respecto a qué.
2. La variación no es más que la diferencia entre dos momentos distintos.

Ejemplo

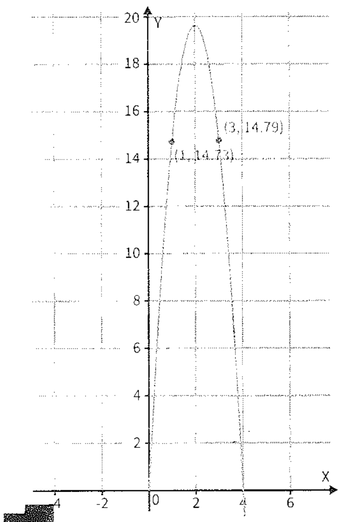


Figura 1.11

1. Imagina que has decidido ahorrar dinero a partir de mañana, cada día vas a guardar \$5. ¿Cuál fue la variación de tus ahorros entre hoy y el día 50? Vamos a expresar esto como una función. La función que describe cuánto ahorras es:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$n\rightarrow 5n$$

Así, sabemos que el día cero tendrás ahorrado $f(0) = 0 \times 5 = 0$ y el día 50 tendrás ahorrado $f(50) = 5 \times 50 = 250$. ¿Cuánto ahorraste? Ahorraste en total \$250 – \$0 = \$250.

2. Previamente vimos la situación de lanzar una flecha con un ángulo de inclinación de 45°, la cual sale a 27.77 m/s. ¿Cuánto cambia su altura entre el tiempo $t = 1$ y $t = 3$?

Recordemos que la ecuación de tiro parabólico en este caso era: $h = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$, de esta forma, la variación entre los dos momentos corresponde con la resta:

$$19.63(3) - 0.5(9.8)3^2 - (19.63(1) - 0.5(9.8)1^2) = 14.79 - 14.73 = 0.06 \text{ m}.$$

Básicamente, vemos que la altura no cambió, esto lo podemos ver explicado en su gráfica, observa que los dos puntos están casi a la misma altura (figura 1.11).

Actividad de aprendizaje 6

Lee la situación y responde la pregunta.

1. Imagina que disparas un cañón con una velocidad inicial de 80 m/s. Determina la variación de las alturas respecto a los tiempos solicitados en los siguientes casos: el ángulo de inclinación con el que se dispara es de 30°, 45°, 60° y 80°.

   a. $t = 0$ y $t = 1$.

   b. $t = 1$ y $t = 2$.

   c. $t = 3$ y $t = 4$.

   ¿Puedes decir en qué momento la altura varía más?

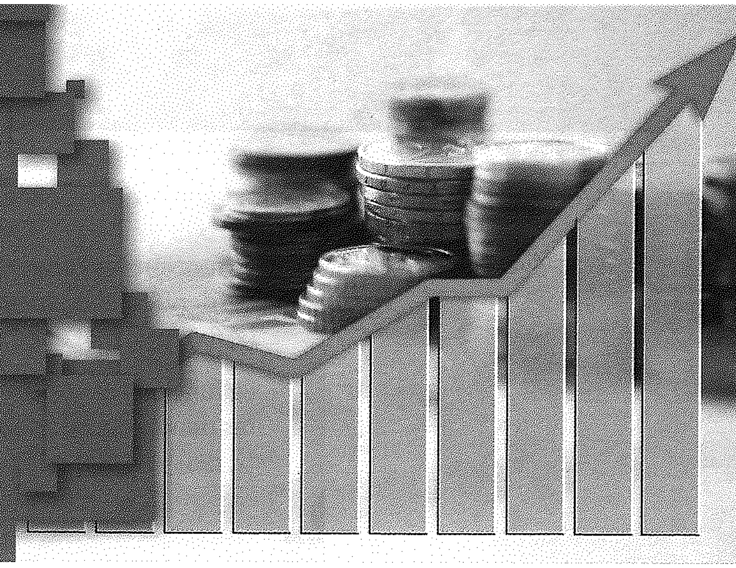
2. Imagina que hoy tienes una deuda de \$200 y has decidido empezar a ahorrar a partir de mañana \$30 diarios. ¿Qué función describe cuánto dinero tienes ahorrado tomando en cuenta la cantidad que debes?

3. Determina cómo varía tu situación financiera respecto a los días:

   a. Día 0 y día 15.

   b. Día 10 y día 15.

Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales



Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes

Antes de continuar con nuestro estudio del cambio, necesitamos conceptos adicionales que nos permitirán enunciar teoremas para facilitar el estudio de las cosas.

Imagina que sales a caminar y en algún momento de tu recorrido debes subir una colina y posteriormente bajarla. Podemos imaginar que tu recorrido es el de esta gráfica (figura 1.12).

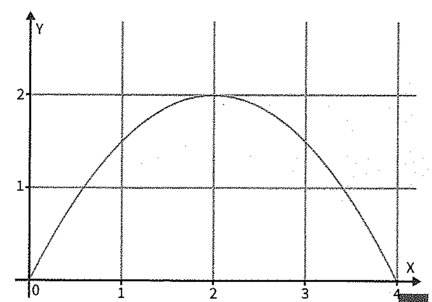


Figura 1.12

Al observar la gráfica es claro que al inicio empiezas a subir la colina, es decir, vas ganando altura, pero en un momento empiezas a bajar la colina, es decir, vas perdiendo altura. Incluso en la gráfica te puedes dar cuenta que casi siempre hay dos momentos de tiempo en que estás a la misma altura. Los conceptos de función creciente, decreciente e inyectiva, nos permiten estudiar estos fenómenos con mayor precisión.

Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que es **inyectiva** si no existen dos números distintos a los cuales se les asigne el mismo número, es decir, si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.

Como nuestras funciones tienen como dominio y como contradominio el conjunto de los números reales, podemos hacer uso de sus propiedades para explicar el comportamiento de una función. Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que:

- La función f es **monótona creciente** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo (x, y) con $x < y$, tenemos que $f(x) < f(y)$.
- La función f es **monótona decreciente** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo (x, y) con $x < y$, tenemos que $f(x) > f(y)$.
- La función f es **constante** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo (x, y), tenemos que $f(x) = f(y)$.

- La función f es **convexa** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo (x, y), con $x < y$, tenemos que la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda por arriba de la gráfica de f.
- La función f es **cóncava** en el intervalo (a, b) si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo (x, y), con $x < y$, tenemos que la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda por abajo de la gráfica de f.

Una función puede tener intervalos donde es creciente, constante o donde es decreciente, lo mismo sucede al ser cóncava y convexa. También es usual sólo referirse a ésta como función creciente o decreciente, en lugar de monótona creciente o monótona decreciente.

Ejemplos

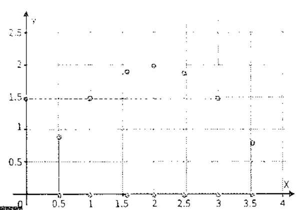


Figura 1.13

1. Retomemos tu paseo por la colina. En este caso, a la gráfica de tu recorrido añadimos algunos elementos que nos permitirán estudiarla con mayor detalle (figura 1.13).

   Como puedes observar, las primeras tres líneas rojas verticales aumentan en tamaño, si colocáramos más líneas verticales a la izquierda de la línea morada, las líneas crecerían, en cambio, las líneas verticales al lado derecho de la línea morada decrecen. Eso nos dice que la función es creciente en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el intervalo $(2, 4)$.

   También te puedes dar cuenta que hay una línea horizontal que toca a la gráfica en dos puntos, eso quiere decir que hay dos momentos distintos en los que tu altura es la misma, por lo tanto, la función no es inyectiva.

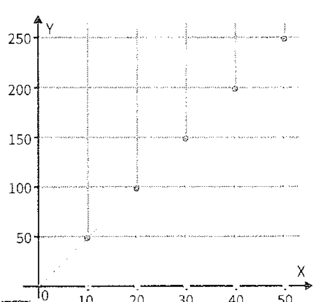


Figura 1.14

2. Analicemos la siguiente función y su gráfica:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto 5n. \end{aligned}$$

   Como puedes notar en la figura 1.14, sólo graficamos un segmento de recta, en este caso, todas las líneas verticales aumentan, eso quiere decir que la función es creciente en el intervalo $(0, 50)$, en realidad, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$. Dibuja en tu cuaderno la recta con más valores de los presentados aquí y corrobora que la función es creciente.

Patrones de crecimiento y decrecimiento

Como has visto, las funciones te permitirán entender las relaciones de cambio, por lo tanto es importante que adquieras la habilidad para reconocer cuando una colección de números crece o decrece de una manera fácil y rápida.

Imagina una situación muy sencilla: Luisa y Ramón están platicando de qué harían si pudieran pedir un deseo a un genio mágico, Ramón dice que él pediría diez millones de pesos, pero Luisa preferiría pedir un peso y que cada día recibiera el doble de lo que recibió el día anterior. ¿Qué opinas, cual crees que sea el mejor deseo? Para analizar la situación observemos la siguiente tabla:

	Deseo			
Ramón	$1 000 000			
Luisa	Día 1: $1	Día 2: $2	Día 3: $4	Día 4: $8
	Día 5: $16	Día 6: $32	Día 7: $64	Día 8:
	Día 9:	Día 10:	Día 11:	Día 12:

Como te puedes dar cuenta, Luisa recibe cada día más dinero. Completa la tabla con los números que falten. ¿Cual crees que sea el mejor deseo? En esta situación, es claro que poder visualizar la información resulta de gran ayuda. Vamos a formalizar los conceptos necesarios.

Una **sucesión** es un conjunto de números con un orden dado y fijo, es decir, sabes cuál es el primer elemento de la sucesión, el segundo y así sucesivamente.

Una **sucesión es creciente** si sus elementos son cada vez mayores, es decir, el primer elemento es menor que el segundo y éste es menor que el tercero, así sucesivamente. De manera análoga, una **sucesión es decreciente** si sus elementos son cada vez menores.

En el ejemplo podemos pensar al deseo de Luisa como una sucesión

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$$

y como puedes observar esta es una sucesión creciente.

Hay algunas sucesiones muy importantes, por ejemplo:

1. La sucesión de Fibonacci: inicia con 1 y 1, y los demás números se generan de la suma de los dos anteriores. De esta forma la sucesión es

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

2. La sucesión de los enteros negativos: inicia con −1 y los demás números se obtienen de restar uno al número previo. De esta forma la sucesión es:

$$-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$$

Para saber más

En las sucesiones, el orden sí importa.

Las sucesiones

$$1, -2, 1, -2\ldots$$

y

$$-2, 1, -2, 1\ldots$$

son diferentes.

En la primera, el segundo elemento es −2, pero en la segunda es 1.

Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

- Para repasar lo visto, lleva **a cabo la actividad.**

1. En estas funciones determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava y convexa, además determina si la función es inyectiva o no.

   a. Las funciones que describen el movimiento de la bala de cañón que se dispara a 80 m/s y con ángulos de inclinación de 30°, 45°, 60° y 80°.

   b. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

   c. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - x^2$.

2. Al igual que las funciones, las sucesiones también se pueden sumar, para ello toma dos sucesiones y suma el primer elemento de una sucesión con el primer elemento de otra sucesión, y así consecutivamente. Usando esta regla suma la sucesión de los enteros negativos y la sucesión de los enteros positivos.

3. Tomando en cuenta el ejercicio anterior, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

   a. ¿Al sumar dos sucesiones crecientes su resultado es una sucesión creciente? ¿Lo mismo para las sucesiones decrecientes?

   b. ¿Crees que pase algo similar con la suma de funciones crecientes y decrecientes?

Si una función pasa de crecer a decrecer, ¿hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo?

Como hemos visto, las funciones nos permiten explicar relaciones de cambio y en muchas situaciones es importante conocer los extremos de esas relaciones, por ejemplo:

1. La producción de una empresa puede depender de un parámetro de costo y la empresa va a querer maximizar su producción con el menor costo posible.

2. En un laboratorio manejan ciertas sustancias inflamables, se sabe que a ciertos cambios de presión la posibilidad de un accidente cambia, es claro que quienes trabajen en el laboratorio van a querer minimizar la posibilidad de un accidente.

Antes de continuar, necesitamos formalizar el concepto de máximo y de mínimo de una función.

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que:

- Un punto x_0 es un **máximo local** de f, si existe un intervalo (a, b), con $a < x_0 < b$, tal que, para todo $x \in (a, b)$, tenemos que $f(x) \leq f(x_0)$.
- Un punto x_0 es un **mínimo local** de f, si existe un intervalo (a, b), con $a < x_0 < b$, tal que, para todo $x \in (a, b)$, tenemos que $f(x_0) \leq f(x)$.

- Diremos que un punto x_0 es un máximo de f, si es el único máximo local de f. De manera análoga, diremos que x_0 es un mínimo de f, si es el único mínimo local de f.

Retomemos el caso de tu paseo por la colina. Como recordarás, la gráfica auxiliar que usamos era (figura 1.15):

Viendo la gráfica es claro que el punto dos es un máximo, la altura de la gráfica es la mayor. Esto es muy fácil de analizar, como la función es creciente a la izquierda de dos, para todo $x < 2$ tenemos que $f(x) < 2$ (observa las líneas rojas a la izquierda de la verde) y como la función es decreciente a la derecha de dos, para todo $x > 2$ tenemos que $f(2) > f(x)$ (observa las líneas rojas a la derecha de la verde).

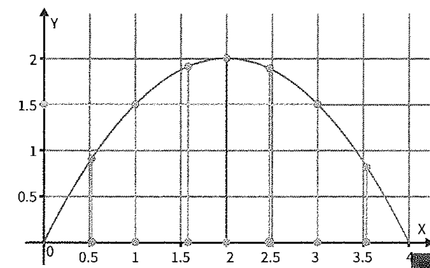


Figura 1.15

Por lo tanto, concluimos que, para todo x en el intervalo $(0, 4)$, tenemos que $f(x) \leq f(2)$, es decir, la función alcanza un máximo en dos.

Después de analizar esto, a uno le gustaría pensar que si la función crece y luego decrece es porque hay un máximo. Analicemos un ejemplo más.

En el lado derecho trazamos una nueva gráfica, observa que la línea roja no tiene final, la línea azul tiene inicio en el punto C pero tampoco tiene final y la línea verde tiene inicio en el punto F. Esto significa que $f(-2) = 3$ (la altura del punto C) y $f(1) = 2$ (la altura de F).

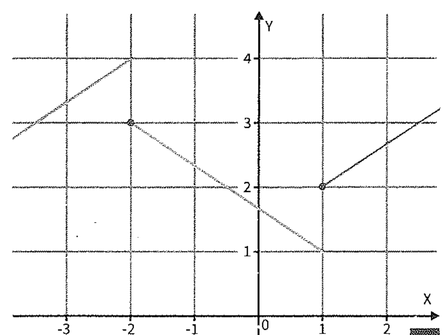


Figura 1.16

Nos gustaría creer que la función tiene un máximo en -2 ya que pasa de crecer a decrecer, desafortunadamente este no es el caso. No hay máximo en -2, la razón es que el punto $(-2, 4)$ no está en la gráfica.

Como te puedes dar cuenta, el dibujo (figura 1.16) da una idea de lo contrario, es por eso que debes tener mucho cuidado al analizar gráficas.

Algo que sí tenemos y que se parece mucho a nuestro primer ejemplo es el siguiente resultado:

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f es creciente en el intervalo $(a, b]$ y decreciente en el intervalo $[b, a)$, así, f alcanza un máximo local en el punto b.

Para los mínimos locales tenemos algo análogo.

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f es decreciente en el intervalo $(a, b]$ y creciente en el intervalo $[b, a)$, así, f alcanza un mínimo local en el punto b.

Uno de los objetivos de este curso es desarrollar las herramientas y los conceptos necesarios para que identifiques los puntos máximos y mínimos locales de una manera sencilla.

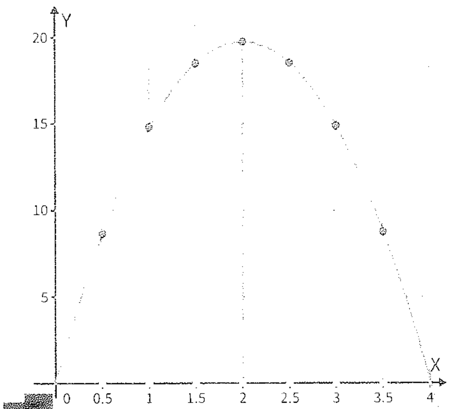


Figura 1.17

Ejemplo

Volvamos a considerar la situación de lanzar una flecha con un ángulo de inclinación de 45° la cual sale a 27.77 m/s. ¿La flecha alcanza una altura máxima? Analicemos su gráfica (figura 1.17).

Como puedes apreciar, a la izquierda de la línea morada las líneas aumentan, eso quiere decir que en el intervalo (0, 2] la función es creciente (la flecha gana altura). En cambio, a la derecha de la línea morada las líneas rojas se hacen pequeñas, así que la función es decreciente (la flecha pierde altura) en el intervalo [2, 4). Por lo que estudiamos previamente, concluimos que la flecha alcanza su máxima altura a los dos segundos y la altura máxima que alcanza es de casi 20 metros.

Actividad de aprendizaje 7

Productos esperados

Lleva a cabo la actividad y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

1. En las funciones de la Actividad de aprendizaje 6, encuentra todos los puntos máximos o mínimos que puedas. En cada caso apóyate en la gráfica y en las propiedades vistas.

2. Utiliza un *software* para graficar las funciones y comprobar tus respuestas.

3. En las olimpiadas podemos ser testigos de cómo rompemos nuestras limitaciones. Cada cuatro años los atletas se esfuerzan por ser más rápidos y más fuertes. Observa las marcas mundiales de la competencia de 100 metros planos.

1968	9.95	Jim Hines
1983	9.93	Calvin Smith
1991	9.90	Leroy Burrell
1996	9.84	Donovan Bailey
1999	9.79	Maurice Greene
2006	9.74	Asafa Powell
2008	9.69	Usain Bolt
2009	9.58	Usain Bolt

Teniendo en cuenta que la velocidad máxima del ser humano es de 45 km/h y al observar las marcas mundiales, ¿crees que estamos cerca de alcanzar el tiempo mínimo posible, cuál crees que sea este valor? Elabora una gráfica con los valores de la tabla, añade una recta horizontal con la altura del tiempo mínimo posible y escribe tus conclusiones.

4. Busca información en internet acerca de las marcas mundiales de las pruebas de 200 metros, 800 metros y 1 500 metros, con ellas elabora una gráfica y decide qué tan lejos están esas marcas del tiempo mínimo posible para un ser humano.

5. ¿Por qué crees que estemos tan lejos del tiempo mínimo, qué limitaciones se te ocurren? Contestar este tipo de preguntas ha sido fundamental para la ciencia y es un campo de investigación actual en áreas como la biomecánica.

6. Escribe todas tus conclusiones y con tus gráficas anéxalas a tu portafolio de evidencias.

¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?

El clima es un fenómeno muy interesante e importante, por una parte, su estudio y predicciones han motivado el desarrollo de muchas técnicas en matemáticas y, por otro lado, para nuestra vida cotidiana es útil saber si lloverá, estará soleado o estará nublado.

Imaginemos que estamos en una ciudad de México y escuchamos que la temperatura máxima para el día de hoy será de 28 °C y la mínima de 15 °C. Como somos muy curiosos, revisamos el clima cada hora para corroborar dicha información, escribimos nuestras mediciones en una tabla.

Hora	Temperatura	Hora	Temperatura
06:00	15 °C	14:00	26 °C
07:00	16 °C	15:00	28 °C
08:00	18 °C	16:00	27 °C
09:00	19 °C	17:00	26 °C
10:00	22 °C	18:00	24 °C
11:00	23 °C	19:00	24 °C
12:00	23 °C	20:00	21 °C
13:00	25 °C	21:00	20 °C

Como sabemos, esta relación de hora-temperatura es una función, a cada hora le corresponde una temperatura, así que podemos hacer una gráfica para marcar los puntos que conocemos.

En la figura 1.18 hemos marcado las distintas temperaturas y además, hemos marcado con dos líneas horizontales las limitaciones que tenemos por la temperatura mínima y la máxima. Como puedes notar, la gráfica parece describir una curva pero, como sólo conocemos pocos puntos.

Lo único que podemos hacer es conectarlos con una línea y esa será nuestra gráfica.

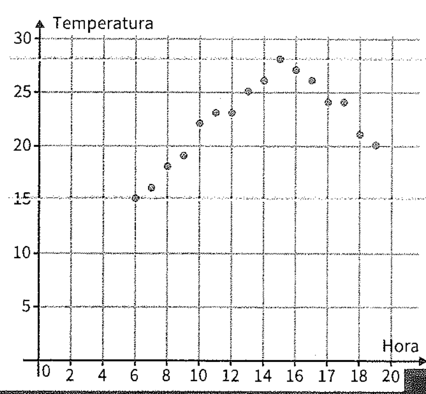


Figura 1.18

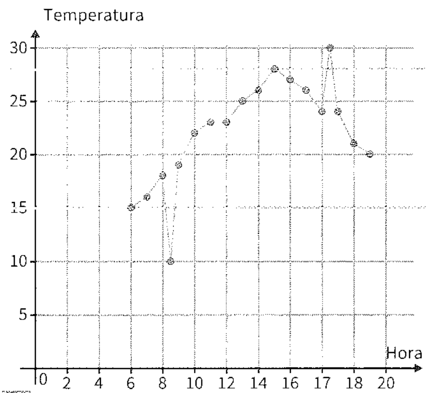


Figura 1.19

Algo importante de los puntos máximos y mínimos es lo siguiente, imagínate que tomáramos más medidas y obtuviéramos la gráfica de la figura 1.19 ¿Crees que nuestras nuevas mediciones sean correctas? La respuesta es no, como sabemos los mínimos y los máximos que se alcanzarán hoy, nuestras nuevas mediciones deben estar en la región delimitada por esas cantidades, en la gráfica se observa que un punto está debajo de la línea que delimita el mínimo y un punto está por encima de la línea que delimita el máximo.

En conclusión, si conocemos los máximos y los mínimos, esto nos asegura en qué región deben estar nuestras mediciones y que, con suficientes puntos, la gráfica será una buena aproximación a la gráfica real.

TIC

En el video se muestra una clasificación de las funciones reales.

bkmrt.com/MZ31Ut

Al igual que muchas cosas, las funciones también se clasifican de acuerdo con sus propiedades. A continuación veremos algunos conceptos que reforzaran tu lenguaje.

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **monomial** si $f(x) = c \cdot x^n$, con c un real cualquiera distinto de cero y n un natural.

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **polinomial** si es la suma finita de funciones monomiales.

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es **racional** si f es el cociente de dos funciones polinomiales. Observa que el dominio X se determina quitando todos los reales que podría causar una división entre cero.

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **irracional** si es una función racional y tiene un radical.

Para nosotros una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **algebraica** si es alguna de las anteriores.

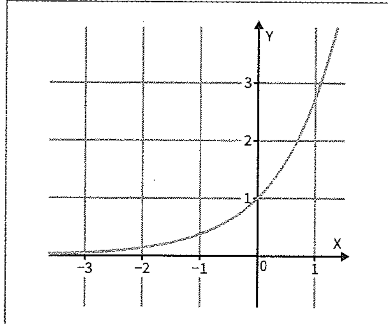
Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **trascendental** si no es algebraica.

$f(x) = \log(x)$, $f(x) = e^x$ o $f(x) = \text{sen}(x)$, son ejemplos de funciones trascendentales.

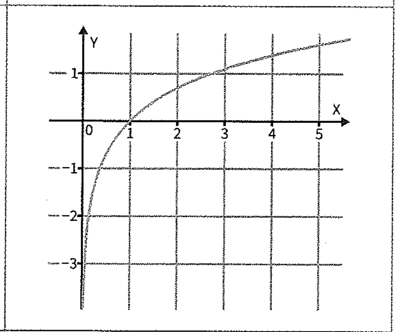
En este momento de tu formación has estado en contacto principalmente con las funciones algebraicas, estas son muy fáciles de manipular y ya conoces algunas de sus propiedades básicas. Para bien o para mal, en el mundo real muchos de los problemas que le interesan a la humanidad estudiar (por ejemplo el clima), se modelan con funciones trascendentales, lo cual conlleva a que sólo tengamos respuestas parciales a los problemas, pero también nos hace tener una teoría más rica en ideas y discusiones.

Dado que las funciones trascendentes son más difíciles de entender, a continuación podrás ver cómo son las gráficas de algunas funciones trascendentes, esta ayuda visual te será útil más adelante.

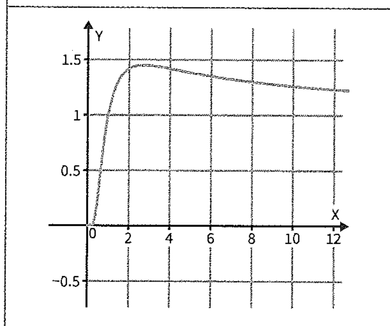
Función $f(x) = e^x$



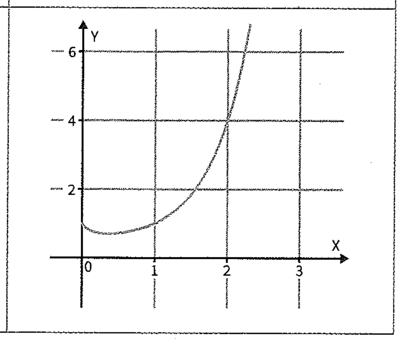
Función $f(x) = \ln(x)$



Función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$



Función $f(x) = x^x$



Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

Responde lo siguiente y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

1. Traza la gráfica de cuál fue el precio del dólar en septiembre, asumiendo que el máximo fue de \$18.05 y el mínimo de \$17.4. Para que tu gráfica sea precisa, usa una hoja de papel milimétrico.

Día	Precio	Día	Precio	Día	Precio
1	\$17.76	11	\$17.52	21	\$17.61
2	\$17.75	12	\$17.56	22	\$17.63
3	\$17.75	13	\$17.60	23	\$17.62
4	\$17.72	14	\$17.61	24	\$17.60
5	\$17.75	15	\$17.60	25	\$17.71
6	\$17.67	16	\$17.54	26	\$17.79
7	\$17.50	17	\$17.52	27	\$17.96
8	\$17.50	18	\$17.50	28	\$18.01
9	\$17.40	19	\$17.58	29	\$18.05
10	\$17.50	20	\$17.60	30	\$18.03

TIC

En este sitio encontrarás información de la población de muchos países.

bkmrt.com/iTGYKe

Entender cómo crece la población es muy importante, el Instituto Nacional de Estadística y Geog rafía (INEGI) realiza censos de la población cada cierto periodo para hacer pronósticos ésta. Visita la liga del recuadro para conseguir información de la población de México, con ella elaborarás una tabla y una gráfica, las cuales deberás anexar a tu portafolio de evidencias.

2. Observa la tabla que relaciona el año con la población y la tasa de crecimiento en México.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	Año	Población	[illegible]
1970	51 226 493	3.16 %	1988	81 397 110	2.06 %
1971	52 874 703	3.22 %	1989	83 062 398	2.05 %
1972	54 599 836	3.26 %	1990	84 755 524	2.04 %
1973	56 381 743	3.26 %	1991	86 478 306	2.03 %
1974	58 186 928	3.20 %	1992	88 228 626	2.02 %
1975	59 981 447	3.08 %	1993	89 998 570	2.01 %
1976	61 746 243	2.94 %	1994	91 775 381	1.97 %
1977	63 478 891	2.81 %	1995	93 545 305	1.93 %
1978	65 181 654	2.68 %	1996	95 304 328	1.88 %
1979	66 857 073	2.57 %	1997	97 053 768	1.84 %
1980	68 509 754	2.47 %	1998	98 779 062	1.78 %
1981	70 140 858	2.38 %	1999	100 449 435	1.69 %
1982	71 749 368	2.29 %	2000	102 037 580	1.58 %
1983	73 340 686	2.22 %	2001	103 524 077	1.46 %
1984	74 927 294	2.16 %	2002	104 908 930	1.34 %
1985	76 521 927	2.13 %	2003	106 233 358	1.26 %
1986	78 131 042	2.10 %	2004	107 573 120	1.26 %
1987	79 755 254	2.08 %			

Teniendo en cuenta que en este periodo no hemos pasado por hambrunas, pandemias o guerras, traza dos gráficas, una de tiempo-población y otra de tiempo-tasa de crecimiento, considerando los máximos y los mínimos. Con toda la información al respecto, ¿puedes interpretar las gráficas? Escribe tus conclusiones y con tus gráficas, anéxalas a tu portafolio de evidencias.

TIC

¿Sabías que los programas de planificación familiar iniciaron en la década de los setenta? En la siguiente liga podrás encontrar información histórica al respecto.

bkmrt.com/5rRVvE

Suma anécdota

Muchas veces, los prejuicios son producto de nuestra ignorancia o miedo ante ciertas situaciones que no comprendemos. Los miedos y los prejuicios están presentes en todos los campos y épocas, tal es el caso del matemático Georg Cantor.

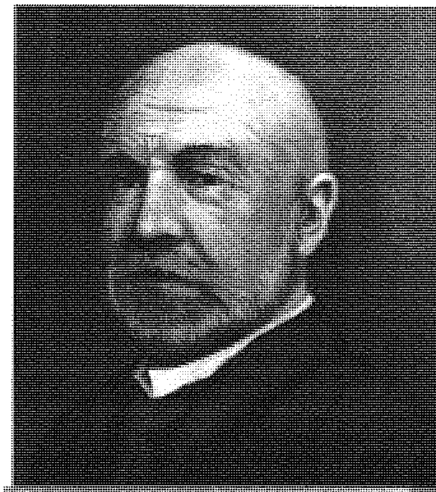


Figura 1.20

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845 - 6 de enero de 1918) fue un matemático nacido en Rusia, junto con los matemáticos Richard Dedekind y Gottlob Frege formalizaron la teoría de conjuntos, la cual es la base de las matemáticas modernas.

El trabajo de Cantor estuvo adelantado a su época, lo que ocasionó que lo tacharan de demente por sus ideas revolucionarias. Su maestro Kronecker consideró su trabajo como una locura matemática.

Las acusaciones de blasfemia por parte de sus compañeros (envidiosos o ignorantes de su trabajo) lo afectaron seriamente. Sufrió de depresión y fue internado varias veces en hospitales psiquiátricos. Su mente peleaba contra varias paradojas de su teoría de conjuntos que parecían derrumbar el trabajo de toda su vida, lo cual no le ayudó a su recuperación.

Finalmente, Georg Cantor falleció en Halle, Alemania, el 6 de enero de 1918 a los 72 años de edad. Al momento de su muerte, Cantor es tomado como un genio incomprendido y tachado de loco, fue con el paso de los años que finalmente se reconoció su trabajo. Actualmente, su obra es ampliamente estudiada y ha sido acreedora de varios honores.

Como podrás darte cuenta, el discriminar a una persona por causa de nuestra propia ignorancia puede traer muy tristes consecuencias, es por eso que siempre debes estar abierto al dialogo y a ver más allá de lo que actualmente conoces.

¿Alguna ves te has encontrado en una situación parecida? ¿Has menospreciado las ideas de los demás? ¿Cómo? ____________________

____

¿Qué hubieras hecho si estuvieras en el lugar de Cantor? Considera que fueron las personas más allegadas a él quienes lo rechazaron primero. ____________________

____

Proyecto integrador

Lee la siguiente situación y desarrolla la actividad. En hojas sueltas copia la tabla siguiente y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

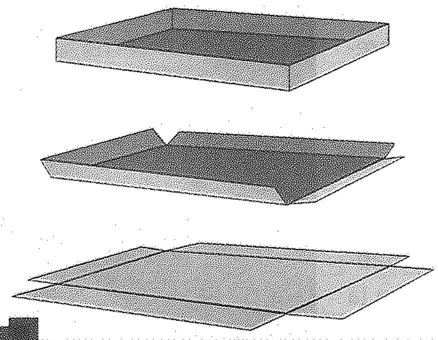


Figura 1.21

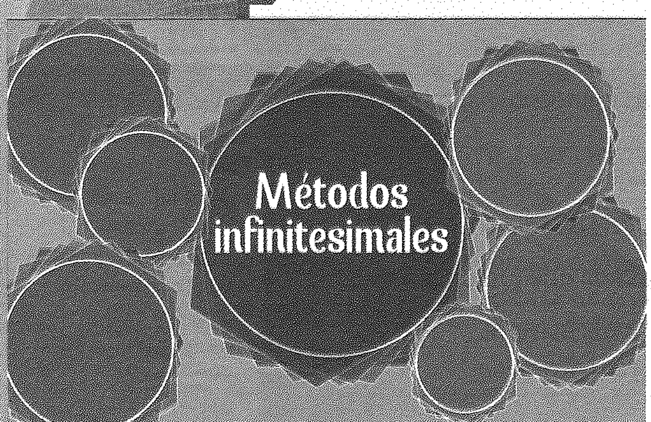
1. Imagina que eres dueño de una empresa y debes decidir cómo vas a elaborar las cajas para tus productos.

   Tu objetivo es que de una lámina de cartón la caja tenga el mayor volumen posible para poder guardar más cosas.

2. Observa la figura 1.20 y elabora, siguiendo tu intuición, cinco modelos de caja. Al final rellena la siguiente tabla con la información obtenida.

Caja	Medidas	Volumen

3. Compara tus medidas con las de tus compañeros. ¿Quién obtuvo el mayor volumen? ¿Qué medidas usó? ¿Crees que haya una forma fácil de encontrar las medidas óptimas?



La historia del término *función*

El concepto *función,* como objeto matemático independiente, susceptible de ser estudiado por sí solo, apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz concibieron la idea de función como la dependencia entre dos cantidades variables. Leibniz, en particular, acuñó los términos función, variable, constante y parámetro. La notación $f(x)$ fue utilizada por primera vez por Alexis Claude Clairaut y por Leonhard Euler, en 1736, en los *Commentarii* de San Petersburgo.

Hacia la prueba Planea

1. ¿Cuál de las siguientes relaciones entre los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{A, B, C, D, E\}$ no es una función?

   $R = \{(2, E), (4, D), (6, C), (8, B), (10, A)\}$

   $R = \{(2, A), (4, A), (6, A), (8, A), (10, A)\}$

   $R = \{(2, A), (2, B), (2, C), (2, D), (2, E)\}$

   $R = \{(2, B), (4, B), (6, A), (8, A), (10, C)\}$

2. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$?

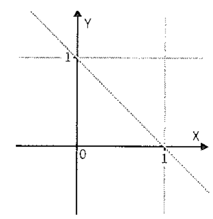
   $\mathbb{R}$

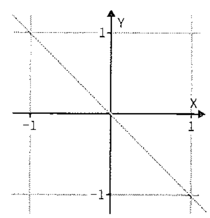
   $\{x \mid x \leq 0\}$

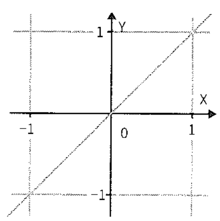
   $\{x \mid x \geq 0\}$

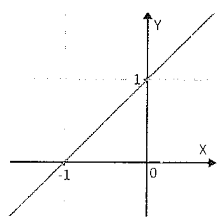
   $\{n \mid n \text{ es entero}\}$

3. Indica cuál es la gráfica de la función lineal $x + y = 0$.

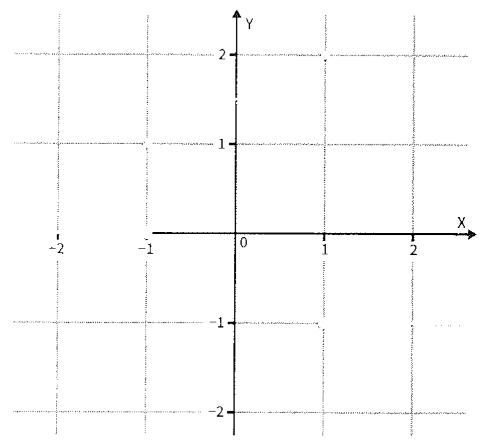








4. ¿Cuál es la función que corresponde a la gráfica?



$$f(x)=\begin{cases} 0; & x<-1 \\ \frac{x+3}{2} & -1\leq x\leq 1 \\ -1 & x>1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0; & x\leq -1 \\ \frac{x+3}{2} & -1\leq x\leq 1 \\ -1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0; & x\leq -1 \\ \frac{x+3}{2} & -1< x< 1 \\ -1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0; & x<-1 \\ \frac{x+3}{2} & -1< x< 1 \\ -1 & x>1 \end{cases}$$

5. ¿Cuál es la suma de las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 2; & x<0 \\ -2; & x\geq 0 \end{cases}; \; g(x)=\begin{cases} -2; & x<0 \\ 2; & x\geq 0 \end{cases}?$$

   $(f+g)\,(x) = 0$

   $(f+g)\,(x) = -2$

   $(f+g)\,(x) = 2$

   $(f+g)\,(x) = -4$

6. ¿Cuántos puntos máximos locales tiene la función polinomial $f(x) = x^4 - x^2$?

   2

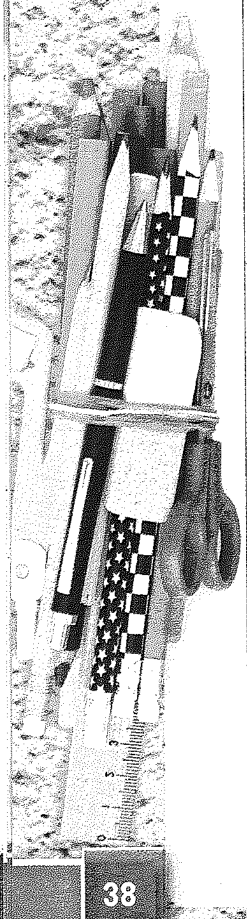
   4

   1

   0

Evalúa tus evidencias

Productos	Criterios	Sí	No
Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas.	La información presentada es verídica y demuestra una investigación profunda.		
	Sé presentar en una tabla la información investigada.		
	La gráfica presentada está en correspondencia con la información de la tabla.		
Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico	Las funciones satisfacen lo solicitado.		
	Las gráficas están bien trazadas y son precisas.		
	Las representaciones dadas sirven para contestar las preguntas planteadas.		
Establecer conjeturas del tipo: ¿cómo serán las sumas de funciones crecientes?	Comprendo cómo sumar sucesiones y realizo las operaciones correctamente.		
	Sé discernir los resultados para la suma de funciones crecientes y decrecientes.		
	Identifico la correspondencia de la sucesión como una función discreta.		



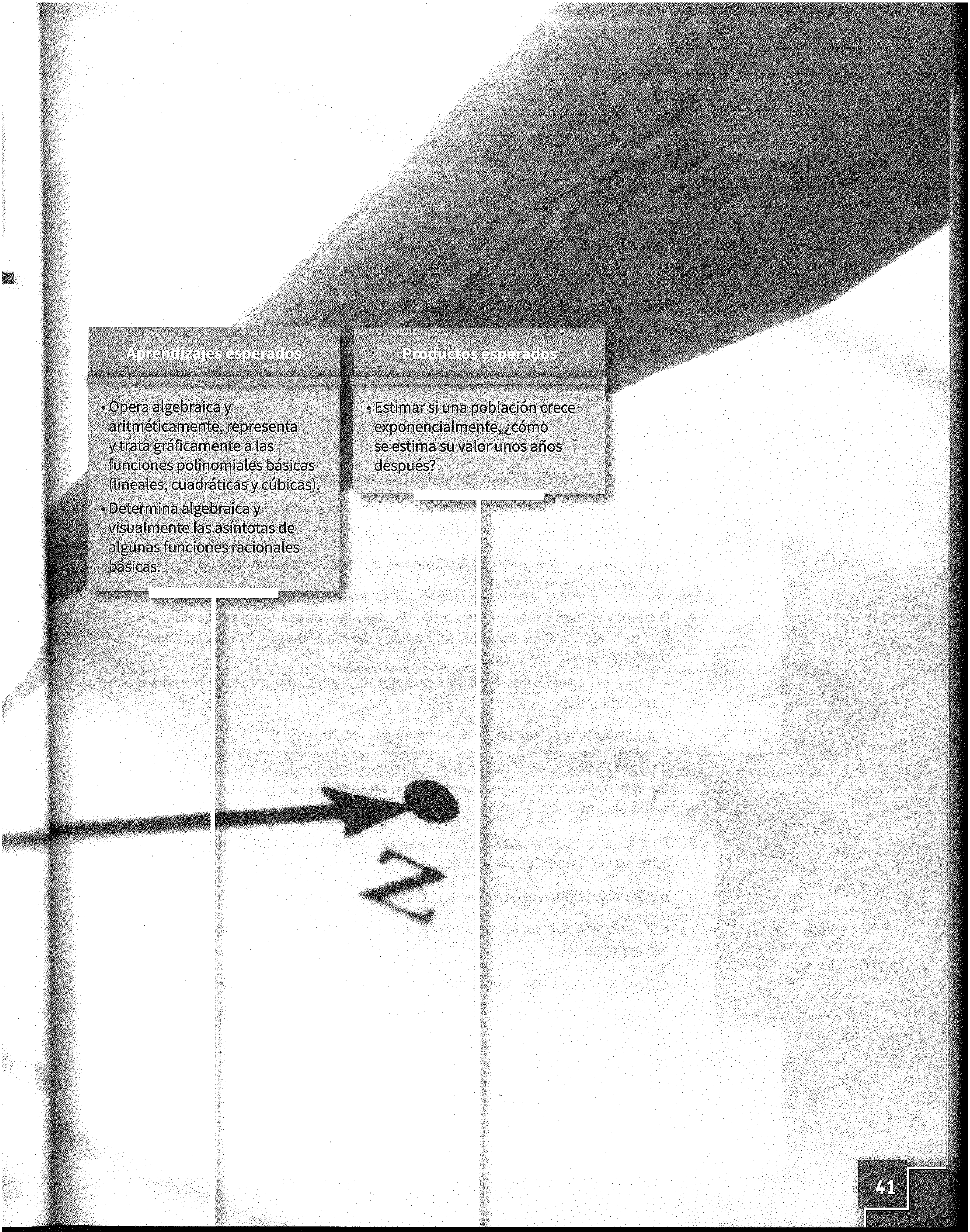
Rúbrica

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Caracteriza las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.	Sé qué es una función y conozco algunos ejemplos de ellas.	Comprendo las diferencias entre una función algebraica y una función trascendente.	Aplico las funciones algebraicas y trascendentes para analizar problemas concretos del entorno.
Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.	Sé de manera intuitiva qué significa que una función sea creciente o decreciente.	Reconozco patrones de crecimiento o de decrecimiento en situaciones específicas.	Comprendo qué significa, dado un modelo matemático, que una función sea creciente o decreciente.
Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.	En una gráfica puedo identificar cuándo una función es creciente y cuándo es decreciente.	Escribo matemáticamente los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.	Aplico estrategias para hallar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función sin la necesidad de tener una gráfica.
Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función	Distingo entre máximos y mínimos locales y globales.	Conozco la región de la imagen donde la función alcanza sus máximos y mínimos.	Identifico los intervalos donde es posible hallar máximos y mínimos y puedo aproximarlos.

Segundo parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

Componentes	Contenidos centrales	Contenidos específicos
• Cambio y predicción: elementos del cálculo.	• Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales. • Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. • Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.	• ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus representaciones? • ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales? • ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿una cuadrática con una lineal?, ¿se te ocurren otras? • Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto. • Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.



Aprendizajes esperados

- Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).
- Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.

Productos esperados

- Estimar si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?

Te escucho, te entiendo, te siento

Para reflexionar

¿Considero que escucho con atención a las personas cuando me cuentan algo?

Cuando las personas me platican algo con lo que no estoy de acuerdo, ¿asumo una actitud positiva para lograr una comunicación efectiva?

Si escucho con atención, ¿puedo hacer sentir a las personas comprendidas y acompañadas?

Para terminar...

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

Escuchar es un proceso que va más allá de oír; implica asumir una actitud para ser receptivo y atento. De esta forma enriqueceremos nuestras relaciones.

Nuestro objetivo

Conocer los recursos básicos de la escucha activa y la comunicación empática.

Condiciones y materiales deseables

Contar con un espacio ventilado y amplio, acorde con el número de participantes. Puede ser el aula o el patio.

Paso a paso

1. Los estudiantes eligen a un compañero como instructor.
2. Se pide al grupo que se organicen por parejas y se sienten frente a frente en un espacio en donde se sientan cómodos (puede ser el piso).
3. Cada pareja decide quién es **A** y quién es **B**, teniendo en cuenta que **A** es la persona que escucha y **B** la que narra.
4. **B** cuenta el sueño más intenso o significativo que haya tenido en su vida. **A** escucha con toda atención los detalles, sin hablar y sin hacer ningún tipo de expresión verbal o sonora. Se sugiere que **A**:
   - Capte las emociones de **B** (las que nombra y las que muestra con sus gestos y movimientos).
   - Identifique las emociones que le genera la historia de **B**.
5. Cuando **B** haya terminado su narración, **A** le describirá tres emociones o sentimientos que haya identificado o sentido con respecto al sueño, y **B** compartirá cómo se sintió al contárselo.
6. Para finalizar, se solicita a los participantes que se reúnan en grupo y reflexionen con base en las siguientes preguntas:
   - ¿Qué emociones experimentan las personas **A** al contar sus sueños?
   - ¿Cómo se sintieron las personas **B** al escuchar las historias sin poder comentarlas o expresarse?
   - ¿Qué actitudes consideran que son necesarias para tener una escucha activa?

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

1. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			

Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales

¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones representacionales?

Ya analizamos varios casos donde entender las situaciones de cambio es importante, también vimos que saber localizar los máximos y mínimos en estos cambios es vital para optimizar ganancias, procesos o la seguridad de las personas.

Un concepto que será muy útil para estudiar cómo varía una función es la razón de cambio o la tasa de variación. Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que la razón de cambio del punto x_0 con respecto al punto x_1, ambos puntos distintos, está dada por:

$$\Delta(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

La razón de cambio mide qué tanto varía la función con respecto a qué tanto varían los puntos.

El objetivo es que dada una función podamos encontrar los intervalos donde sea creciente, decreciente, sus máximos y mínimos, con eso tendríamos mucha información útil.

Desafortunadamente, hasta este momento aún no podemos estudiar todo el caso en general, pero si podemos estudiar un caso, que aunque parece sencillo más adelante veremos cómo toda la teoría se reduce a este caso: las funciones lineales.

Recordemos que la ecuación de una línea recta con pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$ está dada por la ecuación $y = mx + b$. Diremos que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una lineal si $f(x) = mx + b$ para algunos números m y b. Ya vimos varios ejemplos de funciones lineales, como estos:

1. La función "tomar el doble", la cual está dada por $f(n) = 2n$. Su gráfica describe una línea recta con pendiente 2 y que pasa por el origen.
2. La función que describía ahorrar cinco pesos diarios, la cual está dada por $f(n) = 5n$. Su gráfica describe una línea recta con pendiente 5 y que pasa por el origen.

3. La función que describe cómo cambia el volumen respecto a la temperatura de un gas ideal, dado que su número de moles y presión no cambia y que a cierta temperatura t_1 su volumen es v_1, la cual está dada por $f(t)=\frac{v_1}{t_1}t$. Su gráfica corresponde a una línea recta con pendiente $\frac{v_1}{t_1}$ y que pasa por el origen.

Ahora veamos qué podemos decir de una función lineal.

Propiedad 1. Dada una función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y dos puntos distintos x_0, x_1, tenemos que la razón de cambio de x_0 con respecto a x_1 es la pendiente de la gráfica de f.

Como f es lineal, sabemos que $f(x) = mx + b$, su gráfica corresponde a la línea recta con pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$. Ahora, consideremos dos puntos distintos x_0, x_1 y calculemos su razón de cambio:

$$\Delta(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{x_0m+b-(x_1m+b)}{x_0-x_1}=\frac{m(x_0-x_1)}{x_0-x_1}=m.$$

Como vemos, la razón de cambio es precisamente la pendiente de la gráfica de f.

Propiedad 2. Sea una función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si la pendiente de la gráfica de f es positiva, entonces, la función es creciente.

Para ver esto, sólo toma dos putos x_0 y x_1 tales que $x_0 < x_1$, lo cual quiere decir que $x_0 - x_1$ es negativo. Ahora, por lo que hicimos antes, tenemos que:

$$f(x_0)-f(x_1)=m(x_0-x_1).$$

Con esto sabemos que si $f(x_0) - f(x_1)$ es menor o igual a cero, entonces, m es mayor o igual a cero.

Propiedad 3. Sea una función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si la pendiente de la gráfica de f es negativa, entonces, la función es decreciente. De igual manera, si la función es decreciente, entonces, la pendiente de la gráfica de f es negativa.

Propiedad 4. Sea una función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si la pendiente de la gráfica de f es cero, entonces, la función es constante y todos sus puntos son máximos y mínimos. De igual manera, si todos sus puntos son máximos o mínimos, entonces, la función es constante.

Observa la igualdad previa $f(x_0) - f(x_1) = m(x_0 - x_1)$, si la pendiente m es igual a cero, tenemos que $f(x_0) = f(x_1)$. De esta manera, la función es constante y así todos sus puntos son máximos y mínimos.

Así, siempre que tengamos un proceso de cambio lineal podemos explicar todo el detalle que necesitemos. Lo que debemos empezar a desarrollar son las herramientas necesarias para otro tipo de funciones.

Ejemplo

En una gran empresa se ha pronosticado que sus ganancias (en millones de pesos) están modeladas por una función lineal con pendiente 0.5 y que pasa por el punto (0, 1). ¿Qué podemos decir del crecimiento de la empresa, tendrá pérdidas en algún momento, crees que su modelo sea coherente con la realidad?

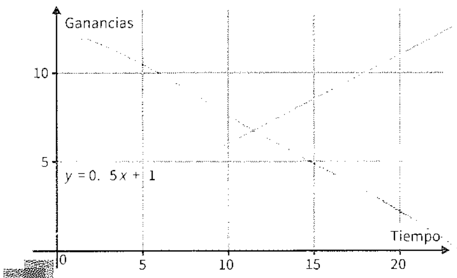


Figura 2.1

Dado que su crecimiento es lineal, sabemos que la función que describe la relación tiempo-ganancias está dada por:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 0.5x+1.$$

Por la Propiedad 2, sabemos que la función es creciente, es decir la empresa siempre ganará más dinero, nunca tendrá pérdidas, lo cual podemos corroborar con la gráfica (figura 2.1).

También, al ser siempre creciente significa que la empresa siempre ganará cada vez más dinero, lo cual es imposible en la vida real. Los mercados cambian constantemente y ninguna empresa puede crecer sin límite por siempre, va a estar limitada por varios casos, uno de ellos es cuánto dinero circula entre la población. Con este análisis podemos decidir que el pronóstico de aquí a varios años debe ser otro y no el que ellos creen.

Actividad

Usa las propiedades que vimos para obtener todas las conclusiones que puedas de estas funciones.

1. El comportamiento de un gas cuyo volumen inicial es de 45 cm^3 a una temperatura de 0 °C, si la temperatura cambia, pero se preserva la presión y el número de moles del gas. Asegúrate de usar las unidades correctamente.

2. Una empresa cree que su capital (en millones de pesos) para operar cada año está dado por una función lineal con pendiente de −0.13 y que pasa por el punto (0, 1). De ser cierta su predicción, ¿qué sucederá con la empresa?

3. Un ingeniero está muy tranquilo ya que vigila cierto gas con un volumen inicial V_1 a una atmosfera de presión. Él sabe que el gas se mantiene a una temperatura constante y su número de moles no cambia, así que cree que el volumen de gas nunca alcanzará un punto crítico sin importar qué ocurra con la presión del contenedor. ¿Crees que sea correcta su idea? ¿Por qué?

4. El dueño de la empresa está muy preocupado por la situación a la que se enfrente su negocio, así que ha decidido crear un plan de recortes de gastos con lo cual su capital (en millones de pesos) para operar cada año estará dado por una función lineal con pendiente de 0.01. ¿Crees que eso solucione el problema?

¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

Ya analizamos dos maneras de estudiar cómo cambia un fenómeno: a través de la variación y la otra es la razón de variación. Veamos en una situación no lineal cuál es su relación con el problema.

Retomemos la situación de lanzar una flecha con un ángulo de inclinación de 45° la cual sale a 27.77 m/s. ¿Qué podemos decir acerca de la variación y de la razón de variación para puntos cercanos a 1 y 2? Recordemos que la función está dada por $f(t) = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$ y dados dos puntos t_0 y t_1, su variación es $f(t_0) - f(t_1)$ y la razón de variación es:

$$\Delta(t_0,t_1)=\frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1}.$$

Analicemos primero qué sucede cerca del punto 1, para ello debemos considerar algunos puntos cercanos a él, tomemos por ejemplo los puntos 0.5, 0.75, 1.25 y 1.5.

Así, obtenemos:

Punto	Variación	Razón de variación
0.5	$f(0.5) - f(1) = -6.14$	$\Delta(0.5, 1)=\frac{6.14}{0.5}=12.28$
0.75	$f(0.75) - f(1) = -2.76375$	$\Delta(0.75, 1)=\frac{-2.76375}{-0.25}=11.055$
1.25	$f(1) - f(1.25) = 2.15125$	$\Delta(1, 1.25)=\frac{2.15125}{0.25}=8.605$
1.5	$f(1) - f(1.5) = 3.69$	$\Delta(0.75, 1)=\frac{3.69}{0.5}=7.38$

En este momento, estos valores no nos proporcionan mucha información, así que estudiemos la gráfica y añadamos algunos elementos auxiliares (figura 2.2).

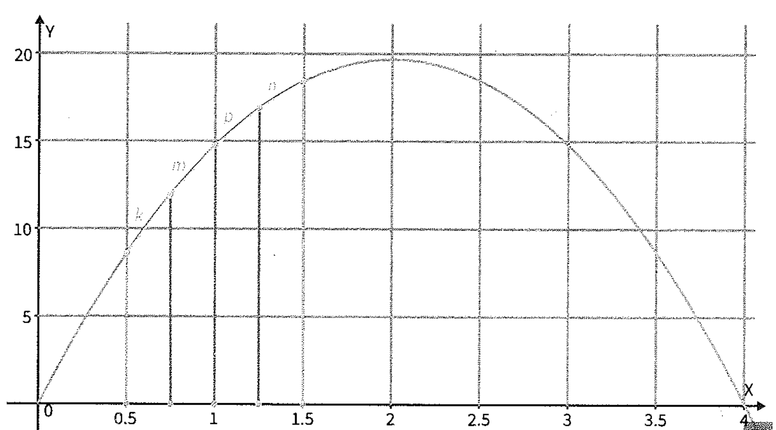


Figura 2.2

En la figura 2.3 añadimos a la gráfica las rectas que unen los puntos $(0.5, f(0.5))$, $(0.75, f(0.75))$, $(1.25, f(1.25))$ y $(1.5, f(1.5))$, con $(1, f(1))$, y aumentamos la escala para que se aprecien mejor las rectas.

Nota que esas líneas rectas se parecen mucho a la gráfica:

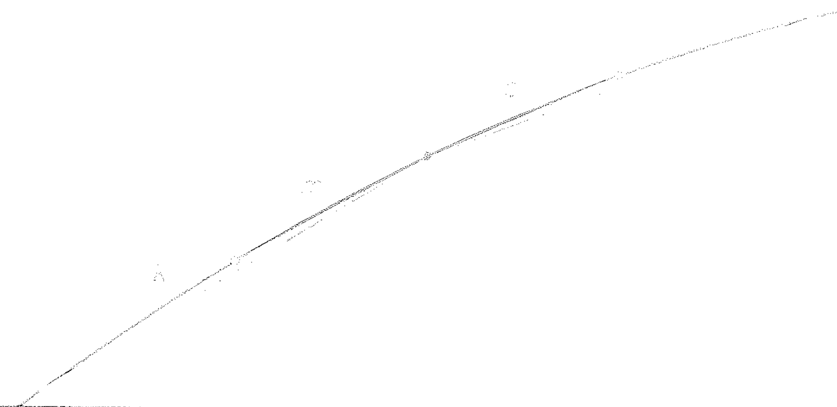


Figura 2.3

Mientras más pequeños sean los segmentos (tomando puntos cada vez más cercanos), más se parecerán a la imagen.

Este proceso se conoce desde hace mucho tiempo y da lugar al concepto de *límite*.

En los segmentos k y n se puede apreciar una separación entre las rectas y la gráfica pero entre los segmentos m y p no podemos ver una diferencia, ¡claro que la hay! Sólo que hay que hacer aún más grande la imagen.

En la sección anterior, vimos que la pendiente nos da información de una línea recta, calculemos la pendiente de los segmentos que construimos.

Con esto, nos damos cuenta de algo muy importante: dados dos puntos, su razón de variación es exactamente la pendiente de la recta que los une.

Segmento	Pendiente
De $(0.5, f(0.5))$ a $(1, f(1))$	12.28
De $(0.75, f(0.75))$ a $(1, f(1))$	11.055
De $(1.25, f(1.25))$ a $(1, f(1))$	8.605
De $(1.5, f(1.5))$ a $(1, f(1))$	7.38

Una cosa que podemos concluir, apelando a los resultados de la sección anterior y permitiéndonos un poco de libertad en la formalidad, es que en ese intervalo la función debe ser creciente y no puede haber ni máximos ni mínimos.

Esto ocurre porque todas las pendientes de las rectas que obtuvimos son positivas, y las rectas se parecen mucho a la gráfica. Observando la gráfica puedes notar que esta afirmación es cierta.

Ahora, analicemos qué sucede cerca del punto dos. Para esto consideremos los puntos 1.75, 1.9, 2.1 y 2.25.

Punto	Variación	Razón de variación
1.75	$f(1.75) - f(2) = -0.31$	$\Delta(1.75,2)=\frac{-0.31}{-0.25}=1.24$
1.9	$f(1.9) - f(2) = -0.052$	$\Delta(1.9,2)=\frac{-0.052}{-0.1}=0.52$
2.1	$f(2) - f(2.1) = 0.046$	$\Delta(1.75,2)=\frac{0.046}{0.1}=0.46$
2.25	$f(2) - f(2.25) = 0.3$	$\Delta(2,2.25)=\frac{0.3}{0.25}=1.2$

Como puedes darte cuenta, las razones de cambio son menores que antes, es más, si tomas los puntos 1.99, 1.999, 2.001 y 2.01, notarás que las razones de variación son casi cero. Con un poco de informalidad, concluimos que como la pendiente es "casi" cero, debe haber un máximo o un mínimo, porque las rectas tienen pendiente "casi" cero y sabemos que si tuvieran pendiente cero hay un máximo o mínimo. Observando la gráfica de la figura 2.3 corroboramos que efectivamente hay un máximo.

La **razón de cambio** nos permite estudiar el comportamiento de una función cerca de un punto fijo. Lo que haremos más adelante es formalizar todo, sobre todo la noción de que una colección de números sea "casi" cero.

Glosario

Razón de cambio.

Se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio.

Actividad de aprendizaje 2

Responde lo siguiente.

1. Intenta dar argumentos de por qué es cierta esta afirmación: si tienes una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la razón de variación entre dos números cualesquiera siempre es cero, entonces la función es constante.

   Recuerda el significado que viste de la razón de variación, intenta hacer un dibujo y apoyándote en él, da un argumento de esa afirmación.

2. ¿Qué sucede si en lugar de pedir que la razón de variación siempre sea cero pedimos que sea un número c cualquiera? Elabora un dibujo y trata de dar una afirmación por ti mismo.

3. Es importante que desarrolles tu imaginación y creatividad, para ello considera las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = \text{sen}(x)$. Para cada una encuentra puntos x_0 y x_1 que cumplan que:

   a. La razón de cambio vale 1.

   b. La razón de cambio vale -10.

   c. La razón de cambio vale 0.

Ahora, analicemos qué sucede cerca del punto dos. Para esto consideremos los puntos 1.75, 1.9, 2.1 y 2.25.

Punto	Variación	Razón de variación
1.75	$f(1.75) - f(2) = -0.31$	$\Delta(1.75,2) = \frac{-0.31}{-0.25} = 1.24$
1.9	$f(1.9) - f(2) = -0.052$	$\Delta(1.9,2) = \frac{-0.052}{-0.1} = 0.52$
2.1	$f(2) - f(2.1) = 0.046$	$\Delta(1.75,2) = \frac{0.046}{0.1} = 0.46$
2.25	$f(2) - f(2.25) = 0.3$	$\Delta(2,2.25) = \frac{0.3}{0.25} = 1.2$

Como puedes darte cuenta, las razones de cambio son menores que antes, es más, si tomas los puntos 1.99, 1.999, 2.001 y 2.01, notarás que las razones de variación son casi cero. Con un poco de informalidad, concluimos que como la pendiente es "casi" cero, debe haber un máximo o un mínimo, porque las rectas tienen pendiente "casi" cero y sabemos que si tuvieran pendiente cero hay un máximo o mínimo. Observando la gráfica de la figura 2.3 corroboramos que efectivamente hay un máximo.

La **razón de cambio** nos permite estudiar el comportamiento de una función cerca de un punto fijo. Lo que haremos más adelante es formalizar todo, sobre todo la noción de que una colección de números sea "casi" cero.

Glosario

Razón de cambio.
Se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio.

Actividad de aprendizaje 2

Responde lo siguiente.

1. Intenta dar argumentos de por qué es cierta esta afirmación: si tienes una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la razón de variación entre dos números cualesquiera siempre es cero, entonces la función es constante.

   Recuerda el significado que viste de la razón de variación, intenta hacer un dibujo y apoyándote en él, da un argumento de esa afirmación.

2. ¿Qué sucede si en lugar de pedir que la razón de variación siempre sea cero pedimos que sea un número c cualquiera? Elabora un dibujo y trata de dar una afirmación por ti mismo.

3. Es importante que desarrolles tu imaginación y creatividad, para ello considera las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$. Para cada una encuentra puntos x_0 y x_1 que cumplan que:

   a. La razón de cambio vale 1.

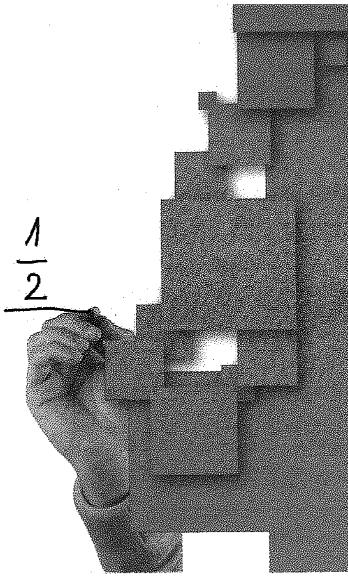
   b. La razón de cambio vale -10.

   c. La razón de cambio vale 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-5}{2x^3-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0}$$



Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites

¿Se pueden sumar las funciones?

Unos de los elementos con los que inició tu formación escolar fue aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir números, manejar de manera correcta estas operaciones te permite efectuar algunas tareas cotidianas, por ejemplo: entregar cambios, calcular cuánto tiempo falta para cierta hora, etcétera.

Al trabajar con funciones entre números reales también es importante poder sumarlas o multiplicarlas, por ejemplo: una empresa sabe que sus ganancias están modeladas por una función f y sus costos por una función g, si pudiéramos restar, diríamos que sus ganancias netas están dadas por la función $f-g$.

Las operaciones entre las funciones se definen de manera natural como sigue.

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones, definimos:

La **suma** de f con g	La **resta** de f con g	La **multiplicación** de f con g
$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f(x)+g(x)$	$f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f(x)-g(x)$	$f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f(x)\cdot g(x)$

La **división** de f con g	La **composición** de g seguida de f
Si g nunca toma el valor de cero, se define: $\frac{f}{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$	$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto f(g(x))$

Ejemplo

1. Imaginemos que en una empresa se sabe que la función de ganancias por x cantidad de productos vendidos está dada por $f(x)=10x$ y que la función de costos de producción por x cantidad de productos está dada por $g(x)=4.85x$. ¿Cuál es la función de ganancias netas por x cantidad de productos vendidos?

   Para calcular las ganancias netas debemos tomar las ganancias y restarles los costos de producción, de esta forma, la función está dada por $(f-g)(x)=10x-4.85x=5.15x$.

Actividad de aprendizaje 3

Productos esperados

Realiza lo que se pide

1. Considera las funciones: $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x^3 + 2x - 7$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $k(x) = (x + 1)^2$. Escribe en tu cuaderno cómo se escriben las funciones siguientes y gráfica cuatro de ellas:

a. $f + g$	b. $h - k$	c. $h \cdot g$	d. $g \cdot f$
e. $f \cdot g$	f. $h \cdot k$	g. $k \cdot f$	h. $h - k$

¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?

Ya sabemos estudiar por completo las funciones lineales, así que lo más natural es que intentemos sumar dos funciones lineales y veamos qué obtenemos.

En el primer ejemplo de la sección anterior teníamos dos funciones lineales y, al sumarlas obtuvimos otra función lineal, ¿crees que esto siempre suceda?

Analicemos este caso, sean dos funciones lineales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m_1x + b_1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = m_2x + b_2$. Recuerda, esto quiere decir que la gráfica de f es una línea recta con pendiente m_1 y que pasa por el punto $(0, b_1)$ y que la gráfica de g es una línea recta con pendiente m_2 y que pasa por el punto $(0, b_2)$.

Ahora, consideremos la suma $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cual está dada por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = m_1x + b_1 + m_2x + b_2 = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2),$$

al observar esa forma, concluimos que: la gráfica de $f + g$ es una línea recta con pendiente $m_1 + m_2$ y que pasa por el punto $(0, b_1 + b_2)$, es decir, $f + g$ es una función lineal.

Así, podemos combinar nuestras propiedades de las funciones lineales con la suma para obtener nuevas propiedades.

Propiedad 5. Si f y g son dos funciones lineales cuyas gráficas tienen pendientes positivas, entonces $f + g$ es una función creciente.

Propiedad 6. Si f y g son dos funciones lineales cuyas gráficas tienen pendientes negativas, entonces, $f + g$ es una función decreciente.

Propiedad 7. Si f y g son dos funciones lineales tales que la suma de las pendientes de sus gráficas no es cero, entonces, $f + g$ no es una función constante.

Actividad de aprendizaje 4

Lleva a cabo la actividad.

1. Argumenta por qué son ciertas las propiedades 5, 6 y 7.
2. Una empresa sabe que sus ganancias (en millones de pesos) están dadas por una función lineal cuya pendiente es 1.25 y pasa por el punto (0, 1), además, sabe que sus costos de producción están dados por una función lineal cuya pendiente es –2 y pasa por el punto (0, 0.1). ¿Cómo es su función de ganancias menos costos? ¿Crees que esa empresa tenga un buen futuro pronosticado?

¿Qué se obtiene de sumar una función cuadrática con una función lineal?

Como vimos, las funciones lineales son las más sencillas de estudiar, otro tipo de función son las cuadráticas, veamos cómo se definen.

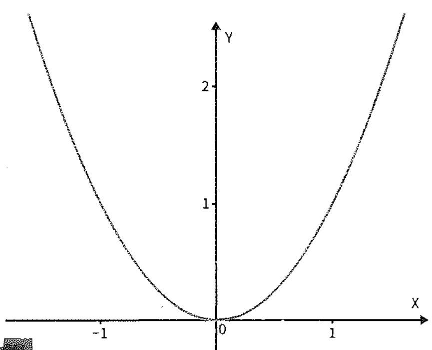


Figura 2.4

Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que es cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y a distinto de cero. En tus cursos previos estudiaste este tipo de funciones, por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ describe una parábola con centro en el origen. Ver figura 2.4.

Analicemos un poco más las funciones cuadráticas. Como recordarás, podemos expresar la función por comprensión:

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

Así, vemos que $y = ax^2 + bx + c$, lo cual es equivalente a: $y - ax^2 - bx - c = 0$.

En tu curso de geometría analítica determinaste que la ecuación general de las cónicas es la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y su discriminante es $B^2 - 4AC$.

Usando el discriminante, una cónica se clasifica en:

1. Si el discriminante es negativo, se trata de una elipse o una circunferencia.
2. Si el discriminante es cero, se trata de una parábola.
3. Si el discriminante es positivo, se trata de una hipérbola.

En nuestro caso, la ecuación era $y - ax^2 - bx - c = 0$, así, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = b$ y $F = c$, de esta forma, el discriminante es $B^2 - 4AC = 0 - 0 = 0$. Por lo tanto, se trata de una parábola. Este análisis nos da la siguientes propiedades.

Propiedad 8. Si tenemos una función cuadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, su gráfica es una parábola que abre hacia arriba si a es positivo o hacia abajo si a es negativo.

Como ya conoces las parábolas, y sabes cómo se dibujan, resulta muy claro que tenemos otra propiedad.

Propiedad 9. Sea una función cuadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si a es positivo, f tiene un mínimo en su vértice y si a es negativo, entonces, f tiene un máximo en su vértice.

Observa que las ecuaciones cuadráticas fueron ligeramente más complicadas pero logramos estudiarlas de manera clara. Veamos qué pasa si sumamos una función cuadrática con una lineal.

Sean dos funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = mx + n$, es decir, f es cuadrática y g es lineal. De esta manera, tenemos que su suma está dada por:

$$\begin{aligned} f+g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Es decir, $(f + g)(x) = (ax^2 + bx + c) + (mx + n) = ax^2 + (b + m)x + (c + n)$. Esto quiere decir que al sumar una función lineal y una cuadrática, el resultado sigue siendo una cuadrática, ¡es más! tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad 10. Sean dos funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f es una función cuadrática y g es lineal. Si f es una parábola que abre hacia arriba, entonces, $f + g$ también es una parábola que abre hacia arriba. De igual forma, si f es una parábola que abre hacia abajo, entonces $f + g$ también es una parábola que abre hacia abajo.

Ejemplo

Consideremos la función $f(t) = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$ la cual describía la altura que tenía una flecha que se disparaba con un ángulo de inclinación de 45° y una velocidad inicial de 27.77 m/s. ¿Qué función obtenemos si a la función f le sumamos la función $g(t) = 12t - 85$.

La función suma será $(f + g)(t) = 19.63t - 0.5(9.8)t^2 + 12t - 85 = -4.9t^2 + 31.63t - 85$. La cual sabemos que será una parábola que se abre hacia abajo.

Actividad de aprendizaje 5

Lleva a cabo la actividad.

1. Argumenta por qué la propiedad 10 es cierta.
2. Usando lo visto en tus cursos de geometría analítica, encuentra cuál es el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$. Usa ese punto y las propiedades 8 y 9 para dar el punto máximo o mínimo de una función cuadrática.

3. Usa lo aprendido del ejercicio anterior para decir cuál es la altura máxima que alcanza la flecha que se disparaba con un ángulo de inclinación de 45° y una velocidad inicial de 27.77 m/s.

¿Se te ocurren otro tipo de sumas?

Ya estudiamos dos tipos de funciones y con eso podemos entender muchos ejemplos, sin embargo, aún hay muchas funciones más complicadas de escribir, por ejemplo, considera este caso: tu mamá decidió darte cierta cantidad de dinero siguiendo un calendario:

1. Los primeros 10 días del mes te dará \$100 diarios.
2. Del 11 al 18 sólo te dará \$80 diarios.
3. Del 19 al 25 te dará \$50 diarios.
4. Del 26 al 30 te dará \$100 diarios.

TIC

En el siguiente enlace se desarrolla el concepto de función por trozos.

bkmrt.com/bgU1sw

Aquí tenemos una relación día del mes-dinero. ¿Cómo expresamos esta relación como una función? Este tipo de funciones se denominan **funciones por trozos**. Ésta se define así:

$$f:\{1,2,\ldots,30\}\rightarrow\mathbb{N}$$
$$n\mapsto\begin{cases}100 \text{ si } n\leq 10 \text{ o } n\geq 26\\ 80 \text{ si } 11\leq n\leq 18\\ 50 \text{ si } 19\leq n\leq 25\end{cases}$$

Otra función por trozos importante es la función valor absoluto de x, que se define como:

$$|x|:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}x \text{ si } 0\leq x\\ -x \text{ si } x<0\end{cases}$$

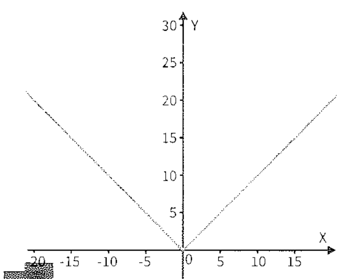


Figura 2.5

Su gráfica es la de la figura 2.5 y como puedes notar, tiene dos trozos de línea recta, por eso, estas funciones reciben el nombre de funciones por trozo. En general, ¿cómo es la suma de dos funciones? La respuesta es que depende de cómo es cada una de ellas, no hay una respuesta general como antes.

Ejemplo

1. Consideremos la función valor absoluto y le sumamos una función lineal $f(x) = ax + b$. De esta forma, la función suma es:

$$|x|+f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}(a+1)x+b \text{ si } 0\leq x\\ (a-1)x+b \text{ si } x<0\end{cases}$$

En este caso, la suma de una función lineal y una por trozos sigue siendo una por trozos. Si tomamos $a = b = 1$, tenemos que la gráfica es la de la figura 2.6.

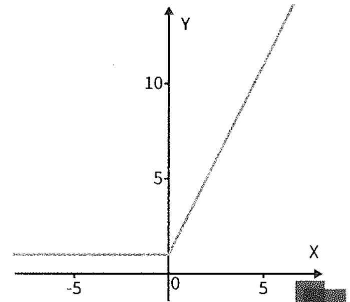


Figura 2.6

2. Consideremos la función valor absoluto de x y la función valor absoluto de $-x$, la cual se define como:

$$|-x|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}-x \text{ si } 0\le x\\ x \text{ si } x<0\end{cases}$$

En este caso, la suma de ambas funciones nos da la función:

$$|x|+|-x|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}x-x \text{ si } 0\le x\\ x-x \text{ si } x<0\end{cases}$$

Observa que para todo x, $|x|+|-x| = x - x = 0$, es decir, la función suma es la función $g(x) = 0$, que corresponde a una línea de pendiente 0 que pasa por el punto (0, 0) (figura 2.7).

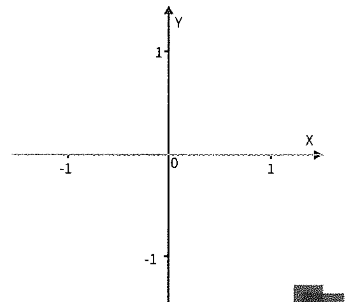
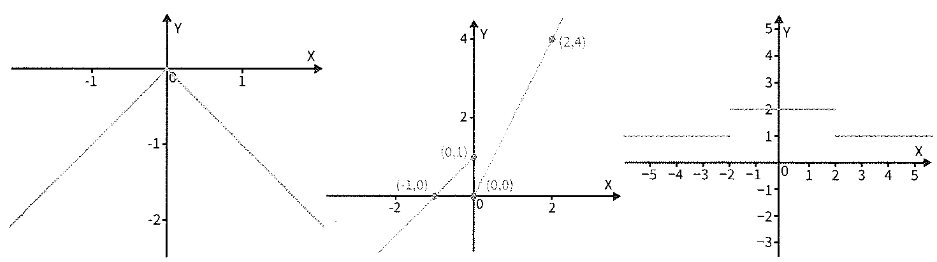


Figura 2.7

Actividad de aprendizaje 6

Lleva a cabo la actividad.

1. Observa las gráficas y escribe en tu cuaderno, para cada una de ellas, una función cuya gráfica coincida con la imagen.



2. Considera las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = x$, traza la gráfica de la suma de estas dos funciones. Usando la gráfica y las propiedades de la función seno, concluye que la suma de una función lineal con una función trigonométrica no tiene por qué ser otra vez una función trigonométrica.

Límites y continuidad

Hasta ahora, has analizado varias situaciones que se pueden explicar a través de una función. Como te has dado cuenta, cuando la función es sencilla, por ejemplo, lineal o cuadrática, fue posible encontrar toda la información que nos interesaba.

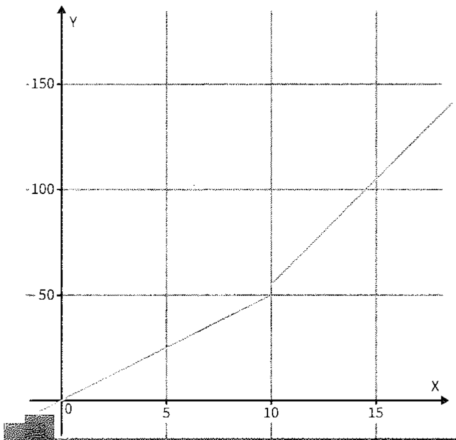


Figura 2.8

Toda la teoría girará alrededor de dos ideas: los límites y la continuidad. Ya has tenido un acercamiento con estos conceptos. Veamos un nuevo ejemplo:

Imagina que a un trabajador le pagan $5 por cada hora trabajada o lo proporcional por cada minuto empleado, además, a partir de 10 horas le pagan $10 por su arduo trabajo y se aplica la misma regla que antes para los minutos, en este caso, la función que describe la relación horas trabajadas-pago es:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 5x \ si \ x<10 \\ 10(x-9)+45 \ si \ 10\leq x \end{cases}$$

Es claro que al inicio le pagan $5x$ por cada hora y después de 10 le van a pagar $45 por las primeras 9 horas y 10 por las restantes. En la figura 2.8 puedes ver la gráfica de esta función.

¿Cuánto le pagan al trabajar 5, 10 o 15 horas? La respuesta es muy fácil, usando nuestra función vemos que $f(5) = 25$, $f(10) = 55$ y $f(15) = 105$.

Algo que también podemos hacer es tomar puntos muy cercanos a los valores 5, 10 y 15, como hicimos cuando estudiamos la razón de variación.

Aplicando esa idea para el número 5 obtenemos:

	4.9	4.99	4.999	Redondeado	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	24.5	24.95	24.995	25	25.005	25.05	25.5

En este caso, vemos que si redondeamos los valores, obtenemos exactamente de $f(5)$. Veamos ahora qué sucede para el 10.

	9.9	9.99	9.999	Redondeado	10.001	10.01	10.1
$f(x)$	49.5	49.95	49.995	¿?	55.01	55.1	56

En este caso, no podemos redondear, ya que por un lado parece que deberíamos redondear a 50 y por el otro lado parece que debemos redondear a 55.

Efectúa lo mismo con el valor de 15, en ese caso, sí debes poder redondear los números y te coincidirá con el valor de $f(15)$.

Esta función falla en el proceso de redondeo en el punto 10, más precisamente, lo que sucede es que se puede redondear a dos cantidades que no coinciden.

Hay otras funciones que ni siquiera se pueden redondear, por ejemplo, la función $f(x)=\frac{1}{x}$ no se puede redondear a ningún valor para $x = 0$. Los límites y la continuidad son la manera formal de entender estos comportamientos.

Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que el límite de f en el punto x_0 es c si al tomar valores muy cercanos a x_0 y evaluarlos en f podemos redondearlos a c. Esto lo vamos a denotar por:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c.$$

En caso de que no exista un c que funcione como su redondeo, diremos que el límite de la función no existe.

Dada una función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que f es continua en el punto x_0, si el límite de la función en el punto x_0 existe y es $f(x_0)$. En esto lo vamos a denotar por:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

En nuestro ejemplo anterior tenemos que $\lim_{x\to 5} f(x)=25$ y que el límite de f no existe en 10.

También, como vimos en el punto 5, el valor que sacamos del redondeo es el mismo que $f(5)$, por lo tanto, la función también es continua en ese punto.

Finalmente, decimos que la función es continua, si es continua en cada elemento de su dominio.

En nuestro ejemplo, la función no es continua ya que en el punto 5 no es continua.

La continuidad es muy sencilla de ver cuando graficas una función: la función es continua si puedes elaborar su gráfica sin despegar el lápiz del papel. Con este simple criterio podrás elaborar muchas gráficas continuas.

Ejemplos

1. Considera una función como la siguiente.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

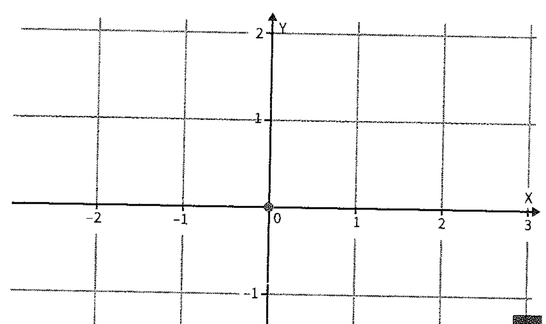


Figura 2.9

En la figura 2.9 tienes su gráfica y, como puedes ver, se trata de dos líneas separadas y de un punto, dado que la gráfica tiene varios trozos, esperamos que no sea continua en 0, vamos a comprobarlo.

Para ello, tomamos valores muy cercanos a 0:

	−0.1	−0.01	−0.001	Redondeado	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1	1	1	1	1	1	1

En este caso, notamos que podemos redondear los números que obtuvimos a 1, es decir, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Ahora, vemos también que $f(1) = 0$, por lo tanto, en este caso, el límite existe, pero no es igual al valor de la función, es decir, $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, así, corroboramos que la función no es continua en 0.

Consideremos ahora el caso de la función:

$$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \tfrac{1}{x}.$$

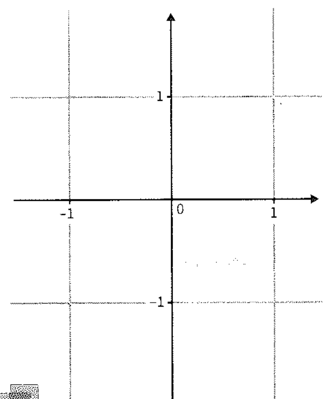


Figura 2.10

Vemos que la gráfica (figura 2.10) consta de dos curvas, así que la función no es continua en 0.

Esto es inmediato de la definición: para que la función sea continua, el valor debe estar en el dominio, pero en este caso 0 no lo está.

Incluso si queremos estudiar su límite en el 0, obtenemos que:

	−0.1	−0.01	−0.001	Redondeado	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000	¿?	1000	100	10

Observa que ni siquiera podemos decir que tenga límite alguno la función.

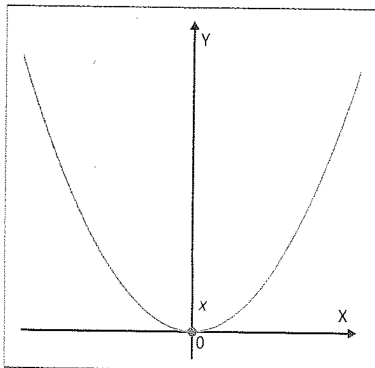
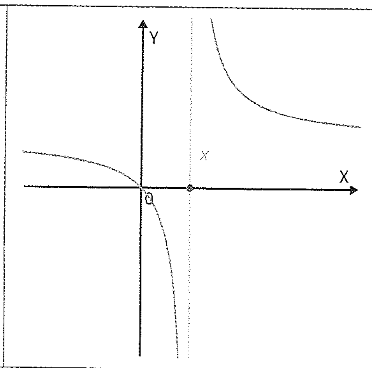
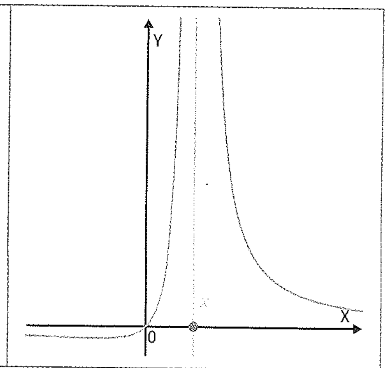
Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que el conjunto de raíces del polinomio $q(x)$ es el conjunto B, la función:

$$f:\mathbb{R}-B\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

es llamada una función racional.

Observa que la función está bien definida, ya que quitamos los puntos donde $q(x)$ vale cero, es decir, donde la fracción deja de tener sentido. Ya estudiaste la función $f(x)=\frac{1}{x}$, la cual es el ejemplo más sencillo de una función racional.

Cuando tienes una función racional y consideras un punto x_0 tal que es una raíz de su denominador, pueden ocurrir los siguientes casos:

		
La función no está definida en x_0, pero su límite existe y completa la gráfica.	Ni la función ni su límite existe en el punto x_0. La gráfica se parte en dos, cada una apunta en direcciones contrarias y cada parte está separada por una línea vertical.	Ni la función ni su límite existe en el punto x_0. La gráfica se parte en dos, ambas partes apuntan en la misma dirección y cada parte está separada por una línea vertical.

Observa que esas líneas verticales son muy importantes, ya que dividen a la gráfica en dos partes. Se llaman **asíntotas verticales** y la definición precisa es:

Dada una función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que tiene una asíntota vertical en el punto x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$ no existe y es tan grande como tú lo desees.

Si la función tiene una asíntota vertical, deberás estudiar con detenimiento la función para ver cómo es: si cada parte apunta en direcciones opuestas o apuntan en la misma dirección.

Un concepto relacionado es el de las asíntotas verticales.

Para que logres imaginarlas, ten en mente la gráfica de la función:

$$f(x)=\tfrac{1}{x}.$$

Es claro que la función tiene una asíntota vertical en cero, pero como puedes notar, en la gráfica (figura 2.11), cuando x crece mucho, la gráfica se parece cada vez a una línea horizontal con pendiente cero.

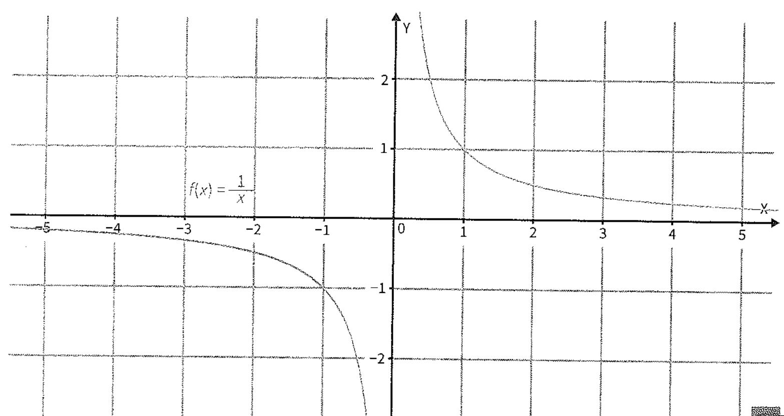


Figura 2.11

En general, la definición de una **asíntota horizontal** es:

Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que tiene una asíntota horizontal si $f(x)$ se redondea a un número d cuando x es muy grande.

En este caso, la ecuación de la asíntota es $y = d$.

Otra manera de escribir esta definición es de la siguiente manera, f tiene una asíntota horizontal si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = d.$$

Éstos se llaman límites al infinito y representan la misma idea de redondear, pero ahora con valores muy, muy grandes.

Algo que te servirá para buscar las asíntotas es esta propiedad:

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, entonces:

- Si el grado de $p(x)$ es mayor que el de $q(x)$, entonces, no existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Es decir, $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.
- Si el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Es decir, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal dada por la ecuación $y = 0$.
- Si el grado de $p(x)$ es igual que el de $q(x)$, entonces, existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y será igual al cociente del coeficiente del grado más alto de $p(x)$ entre el coeficiente del grado más alto de $q(x)$.

Ejemplos

1. Consideremos la función:

$$f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+1}{x^4 - 1}.$$

De manera que $p(x) = x + 1$ y $q(x) = x^4 - 1$.

Como puedes ver, el grado de $p(x)$ es 1 y el grado de $q(x)$ es 4. Por lo tanto, con la propiedad 2 tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Por otra parte, observa qué sucede para puntos muy cercanos a 1:

	0.9	0.99	0.999	Redondeado	1.001	1.01	1.1
$\lvert f(x)\rvert$	5.52	50.504	500.5	Muy grande	499.5	49.502	4.52488

Como vemos, los valores muy cercanos a 1 crecen mucho, por lo tanto, concluimos que debe haber una asíntota vertical y como $f(0.999)$ es negativo y $f(1.001)$ es positivo, ambas partes apuntan en direcciones contrarias.

Finalmente, observa que:

$$\frac{x+1}{x^4-1}=\frac{x+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$
$$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)},$$

así que cuando x sea muy cercana a -1, la función no está definida, pero su límite va a ser -0.25. Construye una tabla como la anterior para corroborar la afirmación.

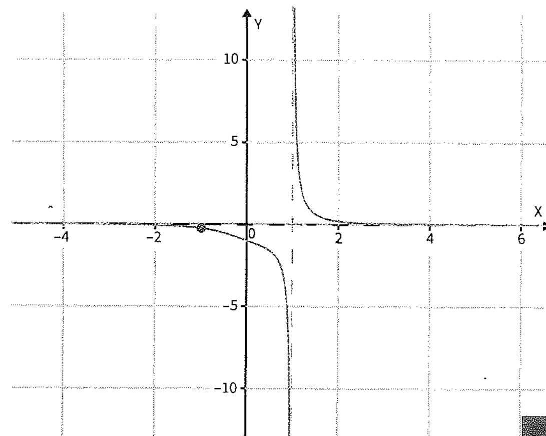


Figura 2.12

Si observamos la gráfica de la función (figura 2.12) reafirmamos lo anterior.

2. Consideremos la función:

$$f:\mathbb{R}-\{-2,2\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{8x^2+1}{x^2-4}.$$

Si llamamos $p(x)=8x^2+1$ y $q(x)=x^2-4$, vemos que el grado de $p(x)$ es 2 y el grado de $q(x)$ es 2, por lo tanto, por la propiedad 3 tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\tfrac{8}{1}=8.$$

Así, la función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es $y=8$.

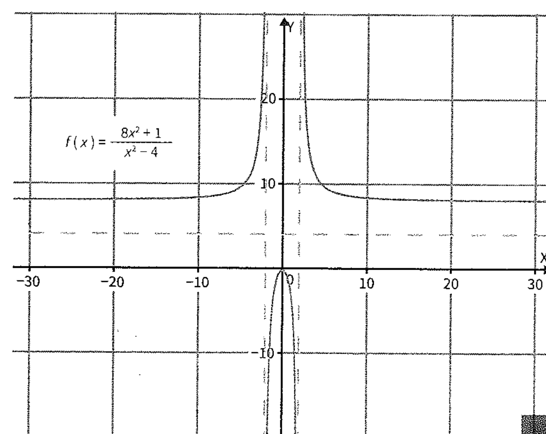


Figura 2.13

De manera análoga al caso anterior, podrás darte cuenta que la función tiene dos asíntotas verticales en -2 y 2 (figura 2.13).

Actividad de aprendizaje 7

Productos esperados

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios.

1. Argumenta por qué es cierta la afirmación: "Toda función lineal es continua".

   Te puedes ayudar en su gráfica y en todo lo que hemos visto.

2. Considera estas funciones:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$h:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$	$k:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$	$h(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$k(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

   Para cada una, determina si existen o no estos límites:

   1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
   2. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
   3. $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$
   4. $\lim\limits_{x\to -1} k(x)$
   5. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
   6. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$
   7. $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$
   8. $\lim\limits_{x\to 0} (h+k)(x)$

   Con esa información elabora una gráfica en tu cuaderno de cada una de ellas. ¿Cuáles son continuas y cuáles no? ¿Cuáles tienen asíntotas y cómo son?

3. Traza en tu cuaderno gráficas de funciones que cumplan lo siguiente:

   a. Una que sea continua en todos sus puntos y que nunca sea mayor que 1.

   b. Una que sea continua en todos sus puntos, excepto en -1 y 1, pero que la función sí esté definida en esos puntos.

   c. Una que sea continua en todos sus puntos, excepto en -1 y 1 y que la función no esté definida en esos puntos.

Previamente analizaste cómo ha evolucionado el mundo deportivo, cada vez la marca de los 100 metros planos se acerca mucho más al mínimo valor. Esta situación es muy práctica, ya que nos permite asegurar que la función no va a ser muy pequeña o muy grande. Ahora, analizarás estos fenómenos en otras situaciones.

Lee la situación planteada y responde lo que se pide.

Imagina que hay una empresa que empezó muy mal su negocio, la infelicidad de sus clientes está modelada por la función $f(t)=\frac{100000}{t}$, donde t es la cantidad de días que lleva el negocio funcionando. Mientras mayor sea el número, sus clientes son menos felices y si la función vale 0, sus clientes son neutrales respecto a la tienda.

1. ¿Qué crees que ocurra en el futuro? ¿Crees que alguna vez sus clientes sean neutrales o al menos estarán muy cerca de serlo?
2. Traza una gráfica de esta función y escribe tu análisis de la empresa. Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales

Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto

Hemos analizado varios ejemplos y modelos de situaciones concretas: cambio de posición respecto al tiempo, cambio de precio-volumen-temperatura de gases y relaciones de costo-beneficio.

Ahora, si sólo conocemos algunos datos del fenómeno, ¿cómo podemos estudiarlo? Para esto podemos hacer dos cosas:

1. Si sabemos de antemano que el fenómeno tiene una cantidad finita de datos, por ejemplo: cómo varía la temperatura por cada día de este mes, el precio del dólar por cada día del año, tu estatura por cada año, etcétera, entonces, podemos construir una función por trozos:

$$f:\{a_1,..,a_n\} \to \mathbb{R}$$
$$a_i \mapsto f(a_i),$$

   donde los a_i son los datos finitos del fenómeno y $f(a_i)$ es lo que vale el fenómeno en el momento a_i. Por lo que hemos visto, sabemos que su gráfica será una cantidad finita de puntos en el plano.

2. Si el fenómeno tiene una cantidad infinita de datos, por ejemplo: cualquier tipo de fenómeno que varíe con respecto al tiempo o a los números reales, a los cuales denominaremos **sistemas continuos**, en general, es imposible dar una descripción correcta de la función *f* que modele el fenómeno, a pesar de eso se conocen algunos ejemplos interesantes que veremos más adelante, y hay una técnica que te puede ayudar a aproximar la función deseada.

   Lo que debemos hacer es considerar un conjunto grande de datos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ordenados de menor a mayor. ¿Qué tan grande?

   La respuesta en la práctica es complicada, miles o millones de datos para situaciones de la vida cotidiana, para nosotros, con al menos 10 datos estará bien.

   De esta manera, puedes ubicar en el plano los puntos $\{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_n, f(a_n))\}$ y trazar las rectas que unen dos puntos consecutivos.

   Exactamente, la unión de todas esas rectas será nuestra gráfica.

Imaginemos que cada recta l_i tiene por ecuación $y = m_i x + b_i$, así, definiremos nuestra función como:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to m_i x + b_i \text{ si } x_{i-1} \le x \le x_i$$

Como recordarás, vimos que era posible aproximar nuestra gráfica tomando líneas rectas, así que mientras más líneas rectas tomemos mejor será nuestra aproximación.

Ejemplos

1. Ya hablamos del tiro parabólico, caída libre y cómo se comporta un gas ideal. Esas funciones te permitirán modelar situaciones de la vida real con cierta precisión.

2. La función de producción de Cobb-Douglas es usada para representar las relaciones entre un producto y las variaciones de los insumos de tecnología, trabajo y capital. Fue propuesta por Knut Wicksell e investigada por Charles Cobb y Paul Douglas. La función es:

$$Q = AT^{\alpha}K^{\beta},$$

donde Q es la producción total (el valor monetario de lo que se produjo en un año), T el número de horas que cada persona trabaja al año, K el costo de todos los bienes de la empresa, A es un factor total de productividad, α y β son unas constantes determinadas por la tecnología disponible.

Una situación concreta de función es: en un estudio por años de la economía de Estados Unidos de América se observó lo siguiente:

Año	1899	1900	1901	1902	1903	1904		1919	1920
Q	100	101	112	122	124	122	…	218	231
T	100	105	110	117	122	121		196	194
K	100	107	114	122	131	138		387	407

Por otros métodos, Cobb y Douglas obtuvieron que: $A = 1.01$, $\alpha = 0.75$ y $\beta = 0.25$.

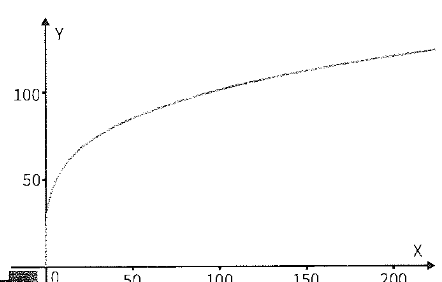


Figura 2.14

De esta forma, la función de producción es:

$$Q = 1.01T^{0.75}K^{0.25}.$$

Nos podemos preguntar, ¿qué sucede si las personas sólo trabajan 100 horas al año?

La función se convierte en $Q = 31.939\sqrt[4]{K}$, cuya gráfica es la figura 2.14.

Esta función nos dice dos cosas, por un lado, si tomas $K = 100$, obtienes que $Q = 100.99$, lo cual es muy cercano al valor de la tabla, así que la predicción de la función es cercana a la realidad. Además, dice que en una economía donde la gente labora 100 horas al año, incrementar todos los bienes de la empresa, como mobiliario, maquinaria, etcétera, tiene un impacto positivo, es decir, la empresa producirá más, pero a la larga esos incrementos de los bienes de la empresa dejan de ser tan significativos.

3. En muchas situaciones nos interesa estudiar cómo crece cierta población: de personas, animales, bacterias, hongos, etcétera. En estos casos, un tipo de modelo que se usa es el de crecimiento exponencial, cuya función está dada por:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto c(1+r)^t, \end{aligned}$$

donde c es la población inicial y r es la tasa de crecimiento.

Por ejemplo, imagina que tenemos un cultivo de 100 bacterias y duplica su tamaño cada hora.

¿Cuántas bacterias tendremos dentro de 12 horas?

En este caso, la función de crecimiento es:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 100\cdot 2^t, \end{aligned}$$

cuya gráfica está en la figura 2.15.

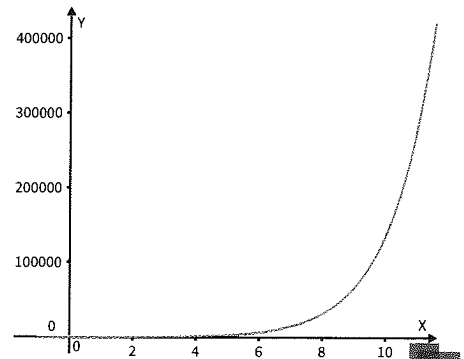


Figura 2.15

En esta gráfica observamos que el cultivo crece demasiado rápido y dentro de 12 horas tendremos un total de $f(12) = 409\,600$ bacterias.

Actividad de aprendizaje 8

Escribe en tu cuaderno las funciones y las gráficas de estos problemas. Intenta deducir algún tipo de información y discútela con tus compañeros.

1. Una población con un millón de individuos tiene una tasa de crecimiento de 0.01 anual. ¿Cuál será la población dentro de 5, 10 y 20 años?
2. Una población de atunes tiene una tasa de crecimiento negativa de -0.1 causada por enfermedades y sobreexplotación del ser humano. Actualmente, se calcula que queda un millón de peces en el mar. A este ritmo, ¿cuántos peces quedarán dentro de 5, 10 y 20 años?
3. Una economía se modela con una ecuación de Cobb-Douglas, cuyos parámetros son $A = 22.01$, $K = 1000$, $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.25$.¿Cómo se comporta la economía con respecto a cambios en la cantidad de horas laborales?

Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas

Ya conoces varios sistemas, sabes cómo estudiar los modelos cuya función sea lineal y cuadrática. ¿Cómo podemos estudiar los demás modelos?

Lo único que sabemos hasta este punto es que si tomamos un sistema continuo y tomamos muchos puntos, entonces, la gráfica de la función se parecerá mucho a una unión de líneas.

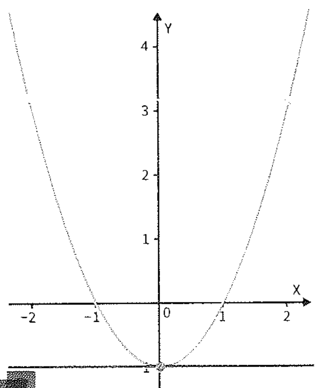


Figura 2.16

En esta sección vamos a iniciar con el estudio más formal de esta idea, para ello tenemos algunos conceptos:

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos dos puntos sobre su gráfica $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Al segmento de recta delimitado por esos dos puntos le llamamos una línea **secante**.

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos un punto sobre su gráfica $(x_1, f(x_1))$. Al segmento de recta que pasa por ese único punto de la gráfica le llamamos la línea **tangente** a la gráfica en el punto $(x_1, f(x_1))$.

En la figura 2.16 puedes apreciar una gráfica, y de color naranja una secante y de verde una línea tangente.

Ya sabemos, además, que la pendiente de la recta secante que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, es la tasa de variación de x_1 con respecto a x_2.

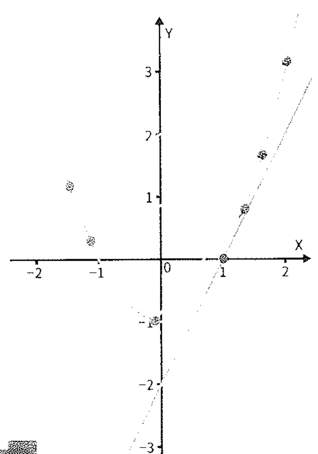


Figura 2.17

¿Cómo podemos describir la recta tangente que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$?

Como recordarás de tus cursos de geometría analítica dado que tenemos un punto, si logramos encontrar la pendiente de esa recta por la ecuación punto-pendiente puedes determinar la ecuación de la línea tangente.

Ahora veamos cómo calcular la pendiente de la recta tangente.

Observa en la figura 2.17 que las líneas anaranjadas se parecen cada vez más a la verde. ¿Qué significa que dos rectas se parezcan si pasan por el mismo punto? Significa que sus pendientes se deben parecer.

Antes marcamos sólo seis puntos y construimos tres secantes, pero imagina que trazamos 10, 100 o 1000 puntos, vamos a denotarlos por $\{x_1, x_2 x_3, \ldots, x_n\}$.

Diremos que la pendiente de la recta tangente "casi" es el número que resulta de redondear la colección de números $\{\Delta(x_1, x_2), \Delta(x_3, x_4), \ldots, \Delta(x_{n-1}, x_n)\}$.

Ejemplo

1. Considera la función de crecimiento exponencial que estudiamos:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$t\mapsto 100\cdot 2^t.$$

¿Cuál es la pendiente de la línea tangente en el punto (2, 400)?

Observa la figura 2.18.

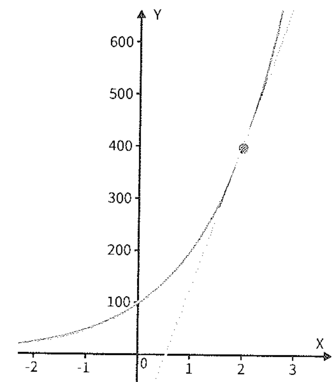


Figura 2.18

Determinemos cuál es su "casi" tangente, para eso tomemos los puntos 1.9, 1.99, 1.999, 2.001 2.01 y 2.1.

Calculemos sus razones de cambio:

Puntos	Razones de cambio
1.9 y 2.1	$\Delta(1.9, 2.1)=\frac{373.213-428.709}{-0.2}=277.48$
1.99 y 2.01	$\Delta(1.99, 2.01)=\frac{397.236-402.782}{-0.02}=277.3$
1.999 y 2.001	$\Delta(1.999, 2.001)=277.26$
1.9999 y 2.0001	$\Delta(1.9999, 2.0001)=277.25$

De esta forma, podemos concluir que la pendiente de la casi recta tangente que pasa por el punto (2, 400) es 277.25. Esto nos dice que la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 277.25x - 154.5.$$

Actividad de aprendizaje 9

Productos esperados

Lee las situaciones planteadas y realiza lo que se pide. Al final, escribe tus conclusiones y con las gráficas, anéxalas a tu portafolio de evidencias.

1. Considera las funciones que describen cómo cambia la altura de una bala de cañón que se dispara a una velocidad de 100 m/s y con ángulos de inclinación de 30°, 45°, 60° y 80°. Calcula la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto $(1, f(1))$ en cada caso.

   Recuerda que una función puede representarse en una tabla, describiendo la relación entre algunos elementos, o de manera algebraica, que es la forma general de la relación. En esta actividad verás que dado un problema, puedes ir de una forma a otra, si éste da los datos necesarios.

2. Una población de tortugas tiene una tasa de crecimiento de 0.15. Si actualmente se calcula que quedan cien mil tortugas.

Completa la tabla para explicar qué sucederá con dicha población..

Años	Población	[illegible]
0		
1		
2		
3		
4		
5		

3. Un laboratorio trabaja con un cultivo de bacterias, desafortunadamente se perdieron los datos de cómo fueron cultivadas y sólo se conoce esta tabla:

0 horas	25
1 hora	32.5
2 horas	42.25
3 horas	54.93
4 horas	71.4
5 horas	92.82

- Determina de manera aproximada cuál debe ser la tasa de crecimiento de las bacterias y dile al laboratorio cuál es la función que modela su situación.
- Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

4. En la sección anterior estudiaste la situación de unos atunes con una tasa de crecimiento negativa. En esta ocasión, estudia qué sucede en estos casos:
   - Se ignoran las alarmas y se aumenta la pesca, por lo tanto, la tasa de crecimiento disminuye en 0.1.
   - Se ignoran las alarmas y la tasa de crecimiento no cambia.
   - Se crea un programa de protección ambiental con lo cual la tasa de crecimiento aumenta en 0.2.

5. ¿Cómo se comporta la población de atunes en las tres situaciones? Elabora las tres gráficas y calcula la pendiente de la recta tangente en los puntos $(1, f(1))$ y $(10, f(10))$. ¿Qué información puedes concluir de tu análisis?

Suma anécdota

Como te habrás dado cuenta, escuchar y entender los sentimientos de las personas y transmitir tus sentimientos son habilidades necesarias que te permitirán llevar una vida social mucho más sana y funcional. Entre los matemáticos también es muy importante desarrollar las habilidades de escuchar y transmitir ideas, sin ellas los matemáticos no podrían trabajar. Lamentablemente no siempre es así y algunos matemáticos quedan en el olvido porque no se les supo escuchar, en algunos casos, el olvido puede durar toda su vida y en otros, sólo un par de años, tal es el caso del matemático Yitang Zhang.

El profesor Yitang Zhang nació en 1955, es de origen chino y es especialista en teoría de números. En mayo de 2013 se hizo famoso en la comunidad matemática por un importante avance en el estudio de los números primos. Yitang no logró tener una buena comunicación con sus colegas y, al quedar académicamente aislado, trabajó muchos años como contador, en un restaurante de comida rápida y al mismo tiempo en su investigación. Fue hasta el 2013 cuando Yitang sorprendió a la comunidad matemática con sus descubrimientos y saltó a la fama, ganando muchos premios y mejorando su situación laboral y profesional.

Figura 2.19

Yitang Zhang

Desafortunadamente estos casos pasan en todas las áreas de la vida, pero debe ser nuestra obligación evitarlo y siempre escuchar a las personas que nos rodean.

Investiga sobre la vida del profesor Yitang y contesta:

1. ¿Crees que Yitang poseería más logros si no hubiera quedado aislado?

____

____

2. ¿Se habría publicado antes su trabajo? ¿Piensas que hubiera sido una publicación compartida?

____

____

3. ¿Hubo alguien que sí lo escuchó?, ¿quién fue y cómo le ayudó?

____

____

CIERRE

Proyecto integrador

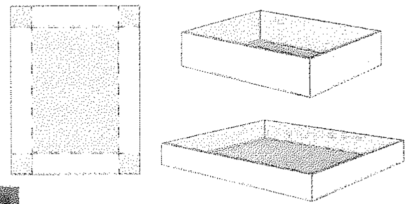


Figura 2.19

En el proyecto integrador anterior, tenías la tarea de encontrar la mejor manera de formar una caja dada una lámina de cartón.

En esta ocasión, vamos a usar lo que has aprendido del cálculo diferencial para determinar quien estuvo más cerca de encontrar la medida de la caja correcta

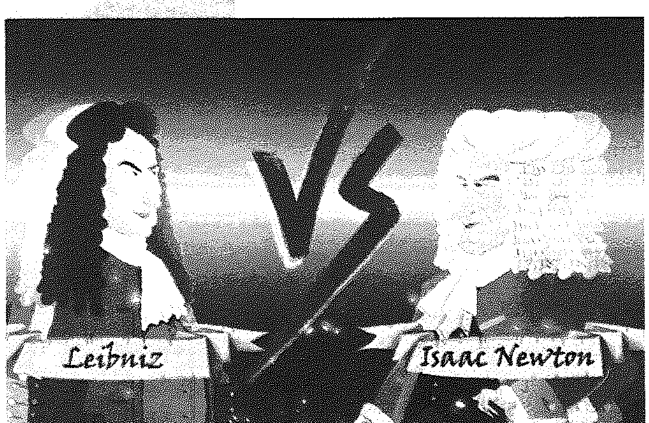
Para finalizar tu aprendizaje del cálculo diferencial **te invitamos a que elabores un resumen en varias fichas bibliográficas** que contengan:

1. El concepto de función y gráfica.
2. Los modelos que viste en este parcial y para qué sirven.
3. Idea intuitiva del límite.
4. Las propiedades de funciones lineales y cuadráticas.
5. Propiedades de la razón de cambio.
6. Formas de identificar los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Es importante que intentes ser concreto con las ideas, esta actividad busca que logres construir una idea sólida y concreta de los conceptos necesarios para abordar el cálculo diferencial y sus aplicaciones. Al finalizar, compara tu resumen con el de tus compañeros y entre todo el salón destaquen los puntos más importantes.

Digital BM

Controversia matemática del siglo XVII



Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, de manera independiente, desarrollaron el segundo teorema fundamental del cálculo, el cual trata de la asignación de límites a las integrales definidas, desde un valor a hasta un valor b, para después sustituir estos valores en la función integrada o antifluxión.

Habiéndolo descubierto 10 años después de Newton, Leibniz no consideraba digno de publicar su cálculo, sin embargo, lo hizo público de inmediato. Cuando Newton se dio cuenta de su publicación en Alemania, comenzaron las acusaciones de plagio por parte del físico y matemático inglés.

Hacia la prueba Planea

1. ¿Cuál es el límite de la función $f(x) = (x - 1)^2 + x$ cuando x tiende a 1?

   a. 1

   b. 0

   c. No existe

   d. -1

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \text{sen}(x + 1)$ en el punto $x = 1$?

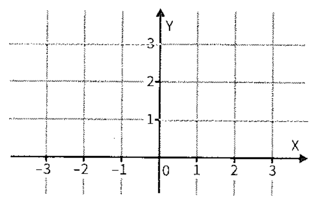
   a. 1

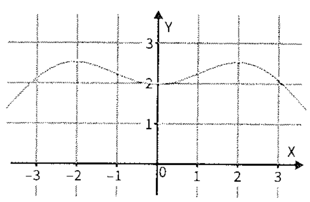
   b. sen(2)

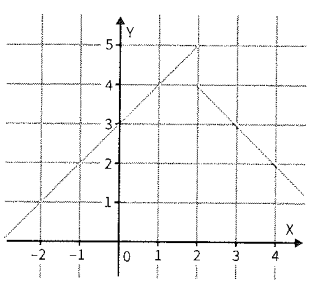
   c. cos(2)

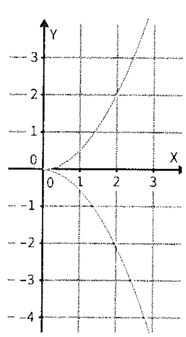
   d. 2

3. Indica qué gráfica representa una función continua.

   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

4. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = 3x^2 + 2x$?

   a. 0

   b. $-\frac{2}{3}$

   c. 0 y $\frac{2}{3}$

   d. 0 y $-\frac{2}{3}$

5. ¿En qué punto hay un valor máximo de la función $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 1$?

   a. 0

   b. No tiene

   c. -1

   d. 1

6. ¿En qué punto la función $f(x) = \tan(x)$ es decreciente?

   a. En ninguno

   b. En todos

   c. En 0

   d. En $\frac{\pi}{4}$

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Estimar si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?	La información presentada es verídica y demuestra una investigación profunda.		
	Sé presentar en una tabla la información investigada.		
	La gráfica presentada está en correspondencia con la información de la tabla.		

Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).	Conozco el concepto de función polinomial.	Conozco los comportamientos gráficos de las funciones polinomiales de grados 1, 2 y 3.	Comprendo el porqué de los comportamientos gráficos de las funciones polinomiales de grados 1, 2 y 3.
Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.	Conozco el concepto de función racional.	Conozco los comportamientos gráficos de las funciones racionales.	Comprendo el porqué de los comportamientos gráficos de las funciones racionales.

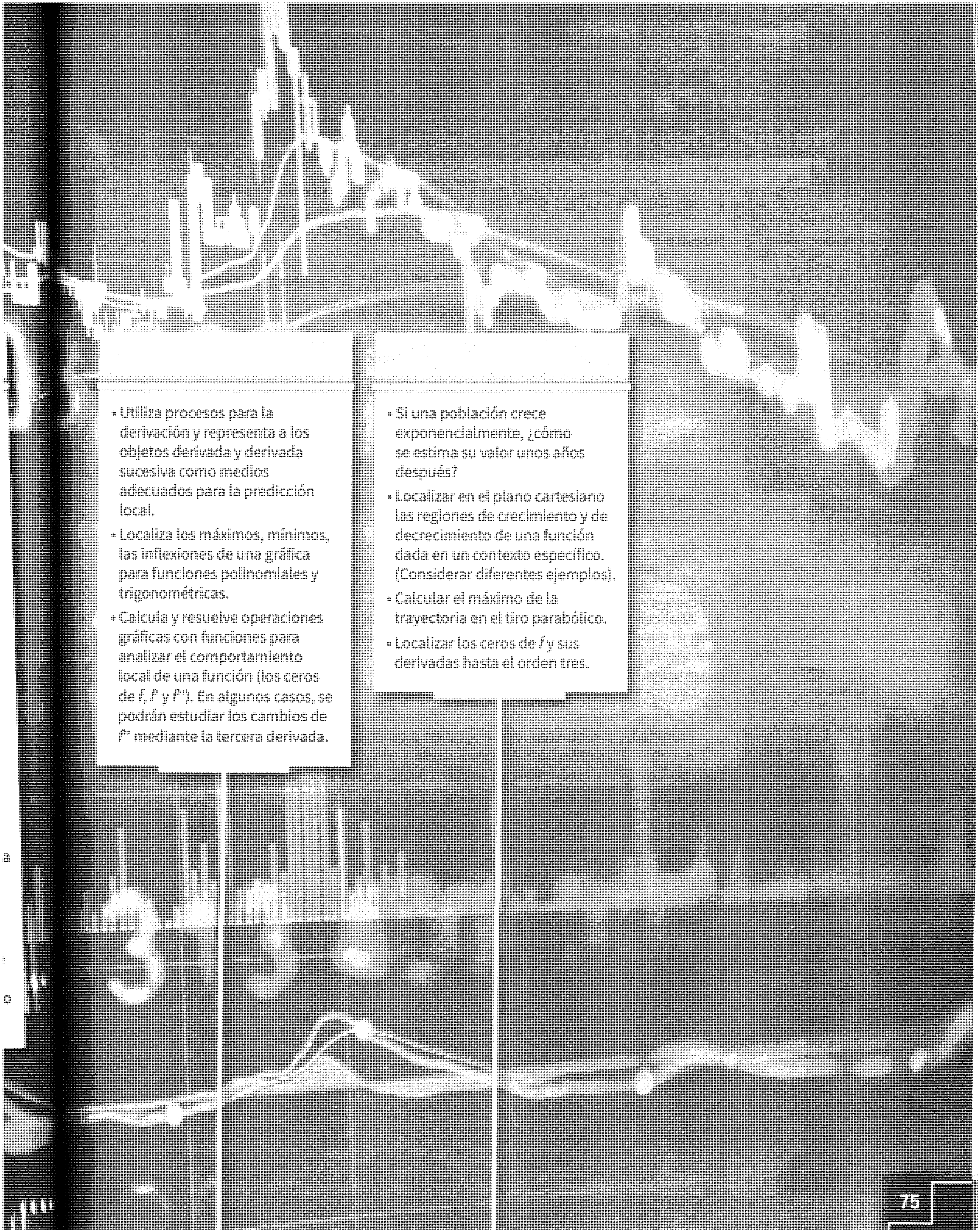
Tercer parcial

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional

- Cambio y predicción: elementos del cálculo.

- Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.
- Graficación de funciones por diversos métodos.
- Criterios de optimización: criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.
- Nociones básicas de derivación de orden 1 y orden 2 (primera y segunda derivada).
- Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

- Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada. ¿Dónde se crece más rápido?
- Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión? ¿Podrías recortar el papel siguiente con esa gráfica?, ¿qué observas?
- Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares.
- Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar?, ¿Qué métodos conocemos?
- Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras).



- Utiliza procesos para la derivación y representa a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.
- Localiza los máximos, mínimos, las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.
- Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de una función (los ceros de f, f' y f''). En algunos casos, se podrán estudiar los cambios de f'' mediante la tercera derivada.

- Si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?
- Localizar en el plano cartesiano las regiones de crecimiento y de decrecimiento de una función dada en un contexto específico. (Considerar diferentes ejemplos).
- Calcular el máximo de la trayectoria en el tiro parabólico.
- Localizar los ceros de f y sus derivadas hasta el orden tres.

Para reflexionar

¿Has sido indiferente ante situaciones que afectan a personas que conoces? ¿Consideras que todas las personas podemos formar parte del cambio social? ¿Observas las problemáticas que hay a tu alrededor, en tu comunidad?

Para terminar

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

Es importante tomar un papel activo en los cambios sociales, ya que de esta manera motivas a que otros participen y se sumen a causas que pueden beneficiar a más personas.

Pongo la lupa en mi comunidad

Nuestro objetivo

Identificar las problemáticas de mi comunidad y ser un agente de cambio social.

Paso a paso

Constantemente estamos atentos sólo a los conflictos o a las situaciones que atravesamos en nuestra vida. ¿Te has dado cuenta si esas mismas circunstancias las compartes con tu comunidad, con tus compañeros o con tus vecinos?

1. Invita: organiza una reunión con estudiantes para compartir situaciones que les preocupan y acciones que pueden hacer para entenderlas.
2. Identifiquen: ¿qué problemáticas sociales existen en su comunidad? Y, ¿qué problemáticas comparten entre ustedes?

   ____

   ____

3. Analicen: ¿han hecho algo por modificar esas situaciones?

   ____

   ____

4. Planeen: Imaginen de qué forma podrían contribuir a mejorar la situación de su comunidad, ¿qué quieren lograr?, ¿quién o quiénes podrían colaborar?, ¿qué recursos necesitan?, ¿a quién deben comunicarlo y cómo?, ¿cómo deben hacerlo? Y, ¿cuándo lo harán?

   ____

   ____

5. Actúen: ¡manos a la obra! Se lleva a cabo la planeación.

Si todos hacemos una pequeña acción por mejorar nuestra comunidad, podemos hacer cambios sociales importantes.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y puedas tomar decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

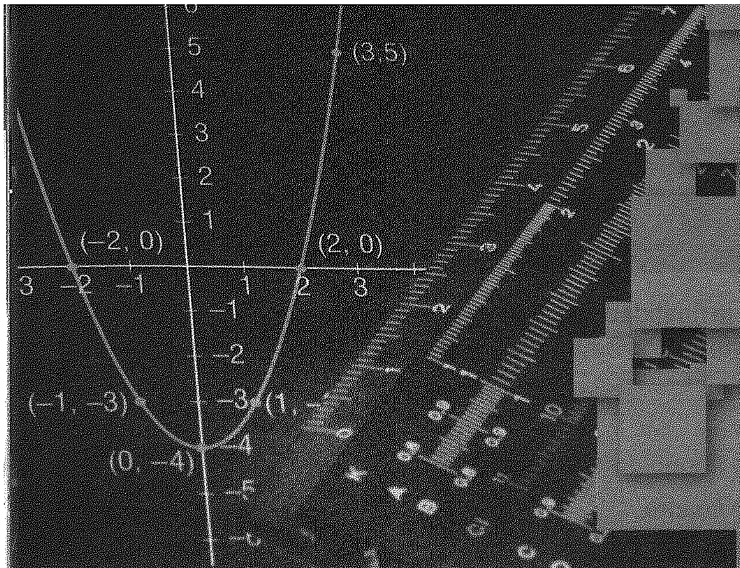
1. Copia y completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo llevar a cabo	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organices la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de lo que implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras que es importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico en el que incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible de tu casa. Utiliza el siguiente esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función

Derivadas

En este parcial aprenderemos los conceptos necesarios para estudiar cualquier tipo de función y determinar su comportamiento. Ya se vio cómo es una función continua y qué significa obtener la derivada de una función en un punto. Sin embargo, es necesario formalizar otros conceptos que trabajaste previamente.

Recuerda que, dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos dos tipos de rectas:

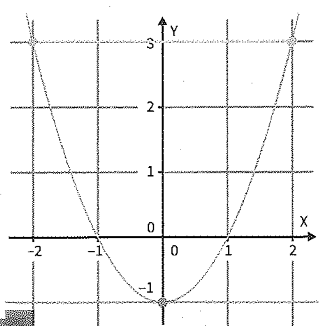


Figura 3.1

1. Una recta secante es la que pasa por dos puntos sobre la gráfica de la función y su pendiente es la razón de variación de los puntos de la gráfica donde corta la recta.
2. Una recta tangente es la que pasa sólo por un punto de la gráfica de la función.

En la figura 3.1, la recta de color rojo es una recta secante y la de color morado es una línea tangente.

También habíamos definido vagamente la pendiente de la "casi" recta tangente al número, la cual surge de redondear las pendientes de secantes que se acercan mucho a la tangente deseada.

Con lo visto en la sección anterior, podemos interpretar todo de una manera más sencilla, vimos que el proceso de redondear los valores se llama calcular un límite, por lo tanto, ahora sí podemos dar una definición concreta.

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vamos a llamar a la derivada de la función f en el punto x_0 al límite de las razones de variación en el punto x_0, esto es:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \Delta(x, x_0).$$

También es usual denotar la derivada de la función f en el punto x_0 como $f'(x_0)$.

Por lo que hemos visto, es claro que la derivada de f en el punto x_0, es la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto x_0. En algunos libros puedes encontrar la siguiente definición de la derivada de f en el punto x_0.

Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vamos a definir a la derivada de la función f en el punto x_0 como:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ambas definiciones son equivalentes y puedes usar la que prefieras.

Cuando tienes una función f: R→R, diremos que es diferenciable en el punto x0 si su derivada existe en ese punto. Diremos que la función es diferenciable si su derivada existe en todos sus puntos.

Como puedes notar, calcular la derivada involucra tomar muchos puntos, calcular sus razones de variación y luego redondear esas cantidades es un proceso largo y, aunque con la práctica cada vez lo harás más rápido, seguirá siendo una tarea cansada. Afortunadamente existen propiedades que te permitirán calcular las derivadas de una manera muy rápida.

Propiedades

1. Si la derivada de $f(x)$ en el punto x_0 existe, entonces, la función $f(x)$ es continua en x_0.
2. Si $f(x) = c$, es decir, f es una función constante, entonces, para cualquier número x_0 tenemos que $\frac{df}{dx}(x_0)=0$.
3. Si $f(x) = ax^n$, con n un número natural y a un número real cualquiera, entonces, $\frac{df}{dx}(x_0)=anx_0^{n-1}$.
4. Si $\frac{df}{dx}(x_0)=a$ y $\frac{dg}{dx}(x_0)=b$, entonces, $\frac{d(f+g)}{dx}(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{dg}{dx}(x_0)=a+b$. Es decir, si las derivadas existen, entonces, la derivada de la suma es la suma de las derivadas.
5. Si $\frac{df}{dx}(x_0)=a$ y $\frac{dg}{dx}(x_0)=b$, entonces, $\frac{d(f\cdot g)}{dx}(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)\cdot g(x_0)+\frac{dg}{dx}(x_0)\cdot f(x_0)$.
6. Si $f(x_0)$ es distinto de cero y las derivadas de $f(x)$ y de $\frac{1}{f(x)}$ existen en x_0, entonces, $\frac{d(\frac{1}{f})}{dx}(x_0)=\frac{-\frac{df}{dx}(x_0)}{f(x_0)^2}$.
7. Consideremos dos funciones f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que podemos componerlas $(f \cdot g)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si las derivadas de $f(x)$ en el punto $g(x_0)$ y de $g(x)$ en el punto x_0 existen, entonces, $\frac{d(f\circ g)}{dx}(x_0)=\frac{df}{dx}(g(x_0))\cdot\frac{dg}{dx}(x_0)$.

Con esto, podemos resolver una gran variedad de problemas, lamentablemente hay otras funciones cuyas derivadas son más difíciles de calcular, por ejemplo, aquellas que usamos para explicar el crecimiento de las poblaciones. A continuación, vamos a listar algunas funciones y sus derivadas, pero omitiremos el cálculo de las segundas, ya que puede ser un poco complicado.

- Para la función $f(x) = x^r$, con r cualquier número real, tenemos que $\frac{df}{dx}(x_0) = rx^{r-1}$.
- Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos que $\frac{df}{dx}(x_0) = \cos(x_0)$.
- Para la función $f(x) = \cos x$, tenemos que $\frac{df}{dx}(x_0) = -\operatorname{sen}(x_0)$.
- Dado un número real no cero a, para la función $f(x) = a^x$, tenemos que la derivada para los puntos donde la función esté definida vale $\frac{df}{dx}(x_0) = a^{x_0}\ln a$.
- Para la función $f(x) = \ln x$ llamada logaritmo natural de x, tenemos que $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Nota que dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable, al determinar su derivada en el punto x_0 se obtiene una nueva función dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dx} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{df}{dx}(x). \end{aligned}$$

De esta manera, es natural intentar volver a derivar a la función $\frac{df}{dx}$, en este caso, queremos calcular la segunda derivada de f.

Vamos a denotar por $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$ a la segunda derivada de f evaluada en el punto x_0, la cual se define:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{df}{dx}(x_0) - \frac{df}{dx}(x)}{x_0 - x}.$$

En algunos libros vas a encontrar la notación $f^{(2)}(x_0)$ o $f''(x_0)$ para la segunda derivada, ambas son equivalentes y puedes usar la que prefieras.

En general, dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puedes intentar calcular la derivada n-ésima de f, la cual está dada por:

$$\frac{d^nf}{dx^n}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x_0) - \frac{df^{n-1}}{dx^{n-1}}(x)}{x_0 - x}.$$

Ejemplos

1. Consideremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuadrática, es decir, $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, y a distinto de cero. Calculemos la derivada de f en el punto x_0 usando la definición y las propiedades de las derivadas.

   a. Por definición. Usemos la versión alternativa.

Queremos calcular:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Para eso, notemos que $f(x_0+h)=a(x_0+h)^2=b(x_0+h)+c$, de manera que:

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0)&=a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c-\left(a(x_0)^2+b(x_0)+c\right)\\&=ax_0{}^2+2ax_0h+ah^2+bx_0+bh+c-ax_0{}^2-bx_0-c\\&=2ax_0h+ah^2+bh=h(2ax_0+ah+b).\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax_0+ah+b)}{h}=\lim_{h\to 0}(2ax_0+ah+b)=2ax_0+b.$$

b. Usando las propiedades. Si llamamos $g_1(x)=ax^2$, $g_2(x)=bx$ y $g_3(x)=c$, tenemos:

Por la propiedad 2: $\frac{dg_3}{dx}(x_0)=0$.

Por la propiedad 3: $\frac{dg_1}{dx}(x_0)=2ax_0$ y $\frac{dg_2}{dx}(x_0)=b$.

Como las derivadas de las tres funciones existen, podemos usar la propiedad 4 de las derivadas para concluir que:

$$\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{dg_1}{dx}(x_0)+\frac{dg_2}{dx}(x_0)+\frac{dg_3}{dx}(x_0)=2ax_0+b+0.$$

Así corroboramos la cuenta que hicimos usando la definición. Calculemos la segunda derivada, observa que $\frac{df}{dx}(x)=2ax+b$, por lo tanto, la segunda derivada es:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x)=2a.$$

Corrobora que la tercera derivada de f es la función constante 0.

2. Imagina que tenemos un cultivo de 100 bacterias que duplica su tamaño cada hora. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a las 12 horas?

Para resolver este ejercicio recordemos el significado de la derivada: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente que pasa por ese punto. De esta manera, vemos que en realidad el ejercicio nos pide calcular la derivada en el punto 12. Recuerda que la función que describía este comportamiento estaba dada por:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\t&\mapsto 100\cdot 2^t.\end{aligned}$$

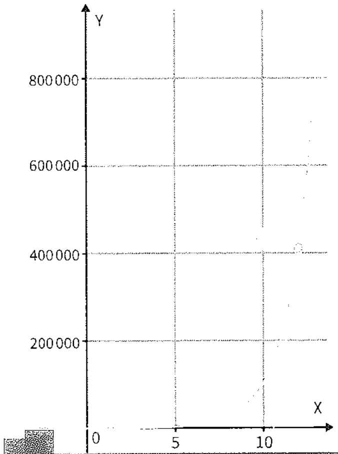


Figura 3.2

Calcular la derivada por la definición es un poco complicado, así que haremos uso de las propiedades. Este tipo de funciones está en tu lista de funciones de ejemplo, es la número 4 y de acuerdo con lo que dijimos, tenemos que:

$$\tfrac{df}{dx}(12) = 100 \cdot 2^{12} \ln 2 = 283913.085.$$

Así, concluimos que la pendiente de la recta tangente que pasa por (12, f(12)) es 283913.085. En la figura 3.2 puedes encontrar cómo se ven la gráfica y la recta tangente a la función.

Es importante recalcar que en realidad puede ser que una función tenga la primera derivada, pero no la segunda, en este libro (salvo contadas excepciones) sólo vamos a tratar con funciones cuya derivada de cualquier orden siempre exista.

Actividad de aprendizaje 1

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios.

1. Considera una función cuadrática f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, usando todo lo que hemos visto, escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (x_0, $f(x_0)$).
2. Considera estas funciones: $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, k(x)=10^x$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=sen(x)$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-2x^3+5x-1$.

   a. Calcula cada una de las derivadas:

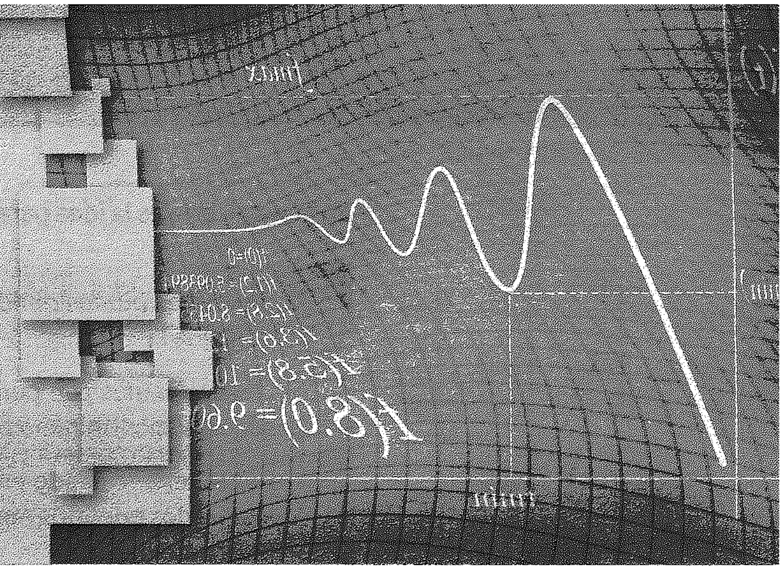
1. $\frac{df}{dx}(10)$	2. $\frac{dg}{dx}(0)$	3. $\frac{dh}{dx}(0)$	4. $\frac{dk}{dx}(0)$
5. $\frac{df}{dx}(0)$	6. $\frac{dg}{dx}(5)$	7. $\frac{dh}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	8. $\frac{dk}{dx}(3)$
9. $\frac{d(f+g)}{dx}(1)$	10. $\frac{d(g \circ h)}{dx}(0)$	11. $\frac{d(h g)}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	12. $\frac{d(h+k \cdot f)}{dx}(1)$
13. $\frac{d(f \cdot g)}{dx}(1)$	14. $\frac{d(h \circ g)}{dx}(0)$	15. $\frac{d(h \circ k)}{dx}(1)$	16. $\frac{d(h \cdot g+k \circ f)}{dx}(1)$

   b. Además, escribe cuál es la ecuación de la recta tangente que pasa por cada uno de los puntos anteriores.

   c. De las cuatro funciones f, g, h y k, calcula su segunda, tercera y cuarta derivada.

3. Una población con un millón de individuos tiene una tasa de crecimiento de 0.01 anual. Calcula la pendiente de la recta tangente que pasa por los puntos 5, 10 y 20 años. ¿Crees que esa información te dice algo del comportamiento de la población?
4. En la situación anterior, debido a una epidemia, la tasa de crecimiento es de −0.1. Calcula la pendiente de la recta tangente que pasa por los puntos 5, 10 y 20 años. ¿Notas un cambio en este caso respecto al anterior, crees que la derivada da algún tipo de información?

Graficación de funciones por diversos métodos. Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones



Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada

Ya disponemos de todas las herramientas necesarias para estudiar las funciones, y a través de su análisis, comprender cómo se comporta nuestro entorno.

El primer caso que estudiaremos es el de los mínimos y máximos locales. Como lo has visto, es de suma importancia saber cuándo una función tiene un máximo o un mínimo, por ejemplo: para conocer el precio óptimo de venta de un producto, o puede ser un punto donde cierta mezcla se vuelva peligrosa.

Retomemos la situación de lanzar una flecha con un ángulo de inclinación de 45° la cual sale a 27.77 m/s. En este caso, recuerda que la función está dada por

$$f(t) = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$$

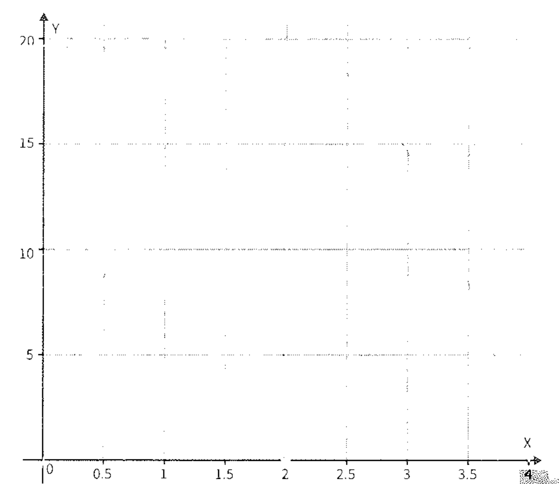


Figura 3.3

y su gráfica está en la figura 3.3.

En la gráfica vemos que la función tiene un máximo en 2, la línea vertical es la altura más grande y la horizontal es la línea tangente que pasa por el punto $(2, f(2))$.

Para calcular la pendiente de esa línea tangente debemos calcular la derivada de la función y evaluarla en 2, pero en este caso es mucho más sencillo, ¿qué pendiente tiene una línea recta horizontal? En tu curso de geometría analítica viste que esas líneas rectas tienen pendiente igual a cero, por lo tanto, concluimos que dado que la tangente es una línea recta horizontal debe tener pendiente cero y, por lo tanto, su derivada es cero al evaluarla en ese punto. Vamos a corroborarlo, tenemos que la derivada de f está dada por la función:

$$\tfrac{df}{dt}(t) = 19.63 - (9.8)t.$$

Así, tenemos que $\tfrac{df}{dt}(2) = 19.63 - (9.8)2 = 0$, lo cual corrobora nuestra predicción inicial.

En general, esta es la idea para buscar los máximos y mínimos:

- Buscamos puntos donde la pendiente de la línea tangente sea cero, es decir, donde la línea tangente sea una horizontal.
- Los evaluamos con puntos cercanos u observamos la gráfica y decidimos si son máximos, mínimos o ninguno de los dos.
- Debes tener cuidado en los puntos donde la derivada no exista, tendrás que analizarlos por otros medios. En este libro no veremos más que algunos ejemplos, pero debes estar consciente que en la vida real esto puede pasar.

Punto crítico.

Generalmente indica dónde hay un máximo, un mínimo o un cambio en la curvatura de la función.

Los puntos donde la pendiente de la línea tangente sea cero son puntos muy importantes y por eso reciben un nombre especial.

Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que un punto x_0 es un **punto crítico** de la función f si su derivada en x_0 vale 0, es decir: $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

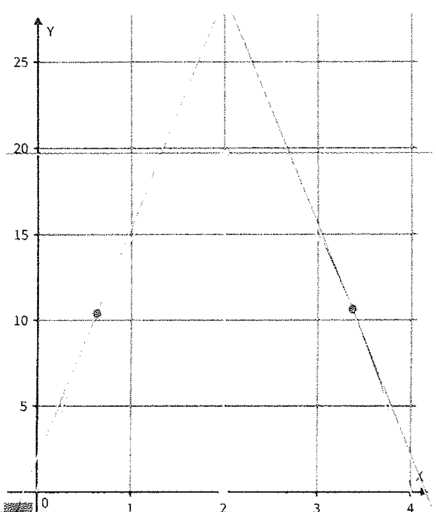


Figura 3.4

En muchas situaciones podemos mejorar nuestro análisis con esta observación: si colocamos en nuestro ejemplo de la flecha algunas líneas tangentes auxiliares, podemos observar que la pendiente de las líneas tangentes para los puntos $(x, f(x))$, con $x < 2$, disminuye paulatinamente y para los puntos $(x, f(x))$, con $x > 2$, la pendiente sigue disminuyendo.

En la figura 3.4 puedes apreciar cómo la primera línea tangente tiene una pendiente positiva y la tercera tangente tiene una pendiente negativa. Traza en tu cuaderno algunas líneas rectas con pendiente 1, 0 y −1 para que corrobores la afirmación previa.

Así, dado que la derivada de f es la función que determina la pendiente de esas rectas tangentes, concluimos que la derivada de f debe ser una función decreciente y por lo que analizamos, una función decreciente debería tener derivada negativa. En general, esto sucede con muchas funciones, el análisis previo nos da el siguiente criterio.

Criterio de la segunda derivada

Imaginemos que tenemos una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que también tiene segunda derivada.

Si x_0 es un punto crítico de f, es decir, $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$, entonces:

- Si la segunda derivada evaluada en x_0 es positiva, entonces, x_0 es un mínimo.
- Si la segunda derivada evaluada en x_0 es negativa, entonces x_0 es un máximo.
- Si la segunda derivada evaluada en x_0 es cero, no podemos determinar nada.

Ejemplos

1. Analicemos el caso de una población con un millón de individuos que tiene una tasa de crecimiento de 0.01 anual. En este caso, ajustando la escala, observamos su gráfica en la figura 3.5.

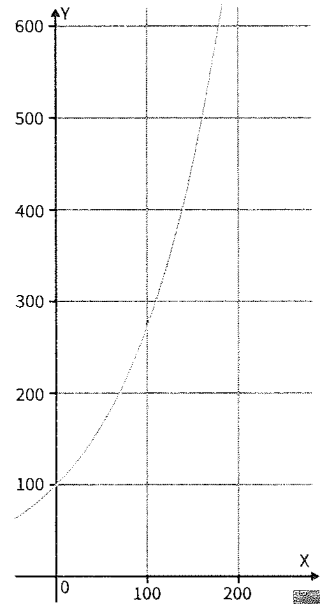


Figura 3.5

Como podemos apreciar, no esperamos que exista un máximo ni un mínimo. Vamos a corroborarlo, para ello recuerda que la función es $f(t) = (1\,000\,000)(1.01)^t$, calculemos su derivada:

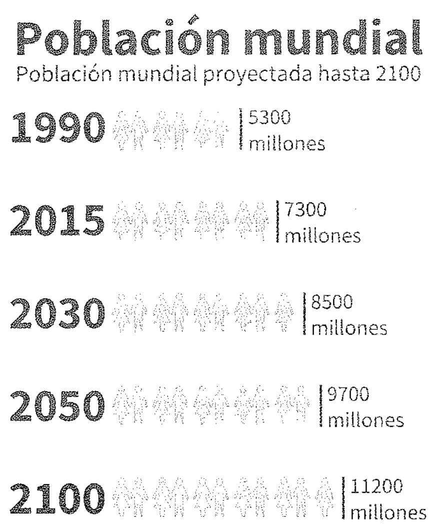
$$\tfrac{df}{dx}(x)=(1000000)\cdot 1.01^x \ln 1.01=(9950.33)\cdot 1.01^x.$$

Para calcular los puntos críticos debemos resolver la ecuación $(9950.33)\cdot 1.01^x=0$ la cual es equivalente a $1.01^x=0$.

Para el estudio de estas funciones, vamos a utilizar las propiedades de exponentes y de logaritmos. Por una parte tenemos que $1.01^x=e^{x\cdot \ln 1.01}$, de esta manera debemos resolver la ecuación: $e^{x\cdot \ln 1.01}=0$.

Pero la función exponencial nunca vale cero, puedes convencerte de esto ya que si existiera una solución, digamos x_0, tendríamos que $\ln(0) = x_0$, pero el logaritmo natural no está definido en cero, así que esa ecuación no tiene solución.

Por lo tanto, concluimos que la derivada de f nunca vale cero, es decir que la función f no tiene puntos críticos, por lo que no tiene máximos ni mínimos. Observa que en este caso, esto equivale a decir que la población continuará creciendo sin control, y cada vez habrá más individuos, ¿te suena conocido? En el mundo actual, la población sigue creciendo y se ha pronosticado que en un futuro esto traerá muchos problemas, nuestro mundo tiene una cantidad de recursos naturales finita y no habrá suficiente comida, agua y espacio para todas las personas. Es por eso que existen muchas campañas a nivel mundial para combatir la sobrepoblación.



TIC

En esta liga puedes leer más respecto al crecimiento de la población mundial.

bkmrt.com/hnSsvL

2. Consideremos una función cuadrática $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Habíamos estudiado con mucho detenimiento esta función y usando lo que aprendiste en tus cursos de geometría analítica habíamos determinado si la función tenía máximos o mínimos, ahora repetiremos esta tarea usando los criterios de la derivada.

Por una parte, tenemos que la derivada de f está dada por:

$$\tfrac{df}{dx}(x)=2ax+b.$$

Para encontrar los puntos críticos, debemos solucionar la ecuación:

$$2ax + b = 0 \text{ cuya solución es } x = -\tfrac{b}{2a}.$$

Así, en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ puede tener un máximo o mínimo. Para usar el criterio de la segunda derivada debemos calcular la segunda derivada de f:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 2a.$$

Concluimos que:

- Si a es negativo, entonces, la función f tiene un máximo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si a es positivo, entonces, la función f tiene un mínimo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$.

Corrobora estos resultados con tu trabajo previo, es más, afirmamos que el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ corresponde al vértice de la parábola, lo cual es algo que ya sabíamos.

Actividad de aprendizaje 2

Productos esperados

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios.

1. Para estas funciones determina sus puntos críticos, máximos y mínimos, y dónde son crecientes y decrecientes.

   $f(x) = x^5 + 3x^3 + 1$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $h(x) = \tan(x)$

   $j(x) = (x + 10)^{100}$ $\quad$ $k(x) = |x|$ $\quad$ $r(x) = (g \circ f)(x)$

   $s(x) = (f + g)(x)$ $\quad$ $t(x) = (k \cdot k)(x)$

   Ten cuidado al determinar el dominio de las funciones y dónde son diferenciables.

2. Traza un esbozo de las gráficas de las situaciones descritas a continuación, tomando en cuenta la información que consigas.

   En un laboratorio trabajan con un cultivo de 100 bacterias, cuya tasa de crecimiento es igual a 0.5. El cultivo es sometido a un experimento para medir la eficacia de un nuevo tratamiento y se ha descubierto que la población disminuye de forma constante con una razón de variación igual a –10. Determina qué pasará con el cultivo de bacterias: puntos máximos, mínimos y dónde es creciente y decreciente. ¿Qué puedes concluir del experimento?

¿Dónde se crece más rápido?

Una vez que hemos determinado los puntos máximos y mínimos deseamos conocer las regiones donde la función es creciente y donde es decreciente. Para esto, volvamos a analizar una situación concreta, el lanzamiento de la flecha.

En la figura 3.6 está su gráfica con líneas tangentes auxiliares. Como puedes notar, previo a los dos segundos, la flecha gana altura y después de los dos segundos comienza a perder altura.

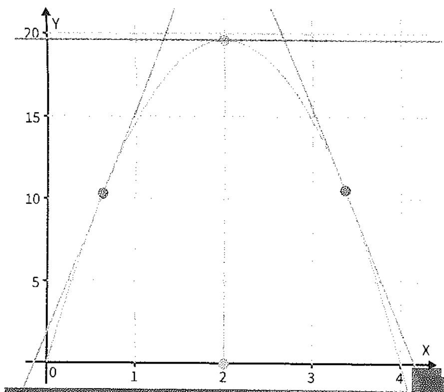


Figura 3.6

Si tomáramos dos puntos x_0 y x_1 tal que $x_0 < x_1 < 2$, dado que la flecha va ganando altura concluimos que $f(x_0) < f(x_1)$, así, su razón de variación $\Delta(x_0, x_1)$ debe ser positiva. Si fijas x_0 y tomas cualquier otro x_1 muy cercano a x_0 verás que la razón de variación seguirá siendo positiva y si tomaras muchos puntos y los redondearas, obtendrías un número positivo, esto significa que:

$$\tfrac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \Delta(x, x_0) > 0\,.$$

Si ahora tomaras puntos mayores a 2 pasaría lo contrario, como la flecha va perdiendo altura, eso significa que la razón de variación debe ser negativa. Por lo tanto, si $2 < x_0$ tenemos que:

$$\tfrac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \Delta(x, x_0) < 0\,.$$

De una manera un poco informal hemos probado la siguiente afirmación: sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, tenemos que:

- Si en un intervalo (a, b) la derivada de la función f está definida y es negativa, entonces, la función f es decreciente en este intervalo.
- Si en un intervalo (a, b) la derivada de la función f está definida y es positiva, entonces, la función f es creciente en este intervalo.

Usando la derivada hemos podido identificar varios aspectos de una función. Hasta este momento tenemos que:

- Si la derivada vale 0, entonces, podemos tener un punto máximo, mínimo o ninguno de estos dos casos.
- Si la derivada es positiva, entonces, la función es creciente.
- Si la derivada es negativa, entonces, la función es decreciente.

Ahora que identificamos las regiones donde la función es creciente y decreciente, nos queda por conocer cuándo es que la función crece más rápido.

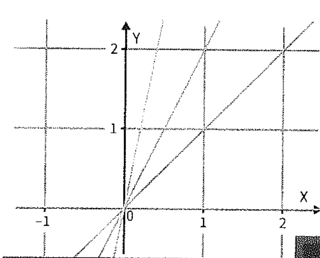


Figura 3.7

Imagina el caso de la flecha, es natural pensar que a los 0.5 segundos vaya más rápido que a los 1.5 segundos, ya que al inicio sale disparada con una velocidad, pero conforme pasa el tiempo la pierde a causa de la gravedad.

La derivada de la función está dada por $\frac{df}{dt}(t)=19.63-9.8t$ y al evaluarla en los puntos anteriores vale: $\frac{df}{dt}(0.5)=14.73$ y $\frac{df}{dt}(1.5)=4.93$. Eso significa que la función se parece más a una línea vertical, es decir, la flecha gana más altura en ese punto. Para comprobar esto, traza varias líneas rectas en tu cuaderno y corrobora que cuando la pendiente es mayor, la línea recta gana más altura.

Ejemplos

1. Analicemos el caso de una población con un millón de individuos, la cual tiene una tasa de crecimiento de 0.01 anual. En este caso, ajustando la escala, vemos su gráfica en la figura 3.8.

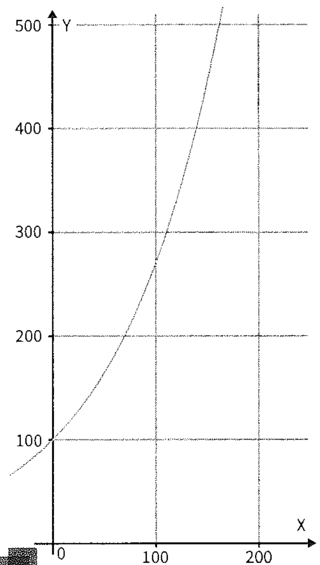


Figura 3.8

Como podemos apreciar, esperamos que la función sea siempre creciente. Vamos a corroborarlo, para ello recuerda que la función es $f(t) = (1\,000\,000)(1.01)^t$ y su derivada es:

$$\frac{df}{dx}(x)=(1000000)\cdot 1.01^x \ln 1.01=(9950.33)\cdot 1.01^x.$$

Para que la función sea creciente debemos buscar los puntos x tales que:

$$\frac{df}{dx}(x)=(9950.33)\cdot 1.01^x>0.$$

Dado que 9950.33 es positivo y 1.01^x también es siempre positivo, concluimos que la derivada de f siempre es positiva, por lo tanto, la función siempre es creciente.

Ahora, analicemos su derivada en 1 y en 10, en este caso tenemos que: $\frac{df}{dx}(1)=10049.8333$ y $\frac{df}{dx}(10)=10991.354$.

Observa que la derivada es mayor en el punto 10, eso significa que la población aumentará más dentro de 10 años que dentro de un año. Esto quiere decir, que la población no sólo no tiene un máximo sino que crece cada vez más rápido.

2. Por primera vez, analicemos el caso de una función trigonométrica. Consideremos:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

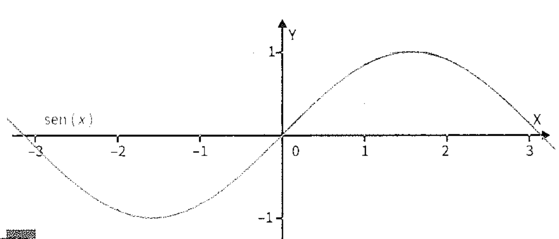


Figura 3.9

Como puedes notar, esta función (figura 3.9) es un poco más complicada de analizar, esperamos encontrar varios mínimos y máximos, además de varios intervalos donde es creciente y decreciente.

Comencemos por determinar los puntos críticos, para esto sabemos que su derivada está dada por $\frac{df}{dx}(x)=\cos(x)$, de esta manera, para encontrar un punto crítico debemos encontrar los puntos x tales que $\cos(x) = 0$.

En tu curso de trigonometría viste que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ y además, la función coseno tiene un periodo de 2π, por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Debemos calcular la segunda derivada de la función f, la cual es: $\frac{d^2f}{dx^2}(x)=-\operatorname{sen}(x)$.

Notemos que: $\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ y $\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$.

Por lo tanto, los puntos $\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in Z\}$ son críticos y al evaluarlos en la segunda derivada son negativos, así que corresponden a máximos. En cambio, los puntos $\{\frac{3\pi}{2}+2\pi k \mid k \in Z\}$ son críticos y al evaluarlos en la segunda derivada son positivos, así que corresponden a mínimos.

Para determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente, debemos analizar cuándo la primera derivada es positiva o negativa. Recuerda que la función $\cos(x)$ es positiva cuando x cumple que $\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Finalmente, usando el periodo de la función, concluimos que la función es creciente en los puntos de la forma $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k \text{ con } k \in Z\right\}$.

De manera análoga, podemos concluir que la función es decreciente en los puntos de la forma $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k \text{ con } k \in Z\right\}$.

En la figura 3.10 puedes ver la gráfica de la función seno, los puntos de color morado corresponden a los máximos y mínimos locales, las partes de color rojo es cuando la función es decreciente y la parte de color azul, cuando la función es creciente.

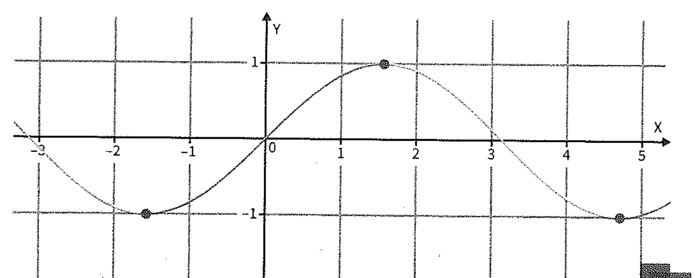


Figura 3.10

Actividad de aprendizaje 3

Productos esperados

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios.

1. En la figura 3.11 puedes observar la gráfica de la función $f(x) = 1/x$.

   Usa lo que has aprendido para:

   a. Determinar las regiones donde la función es creciente y decreciente.

   b. Justificar esta afirmación: la función crece más rápido mientras los puntos estén más cerca del valor cero.

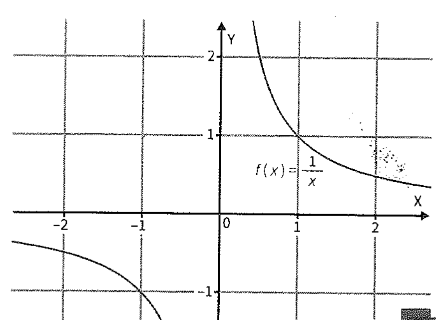


Figura 3.11

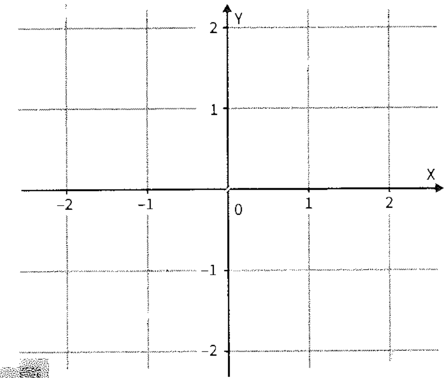


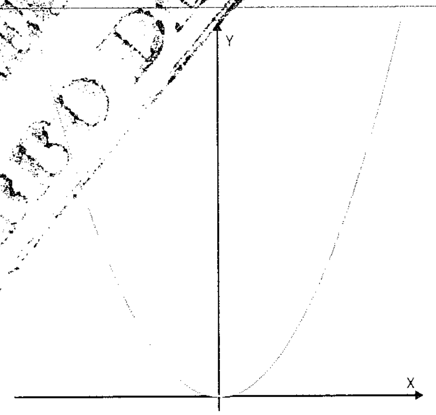
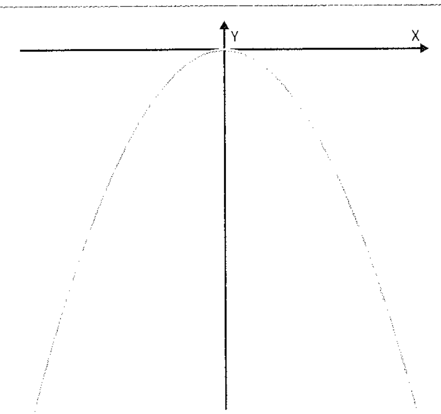
Figura 3.12

2. Una economía se modela con una función de Cobb-Douglas, cuyos parámetros son $A = 22.01$, $K = 1000$, $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.25$. Determina los puntos máximos y mínimos, y las regiones donde es creciente y decreciente el comportamiento de la economía con respecto a cambios en la cantidad de horas laborales.
3. Usando lo que has aprendido en esta sección, justifica la afirmación: el aumento de las horas laborales tiene un impacto positivo en la economía aunque eventualmente este factor deja de ser importante.
4. Estudia el comportamiento de la función $\tan(x)$, para ello determina los puntos críticos, regiones donde es creciente y decreciente. Además, intenta dar argumentos para explicar el comportamiento de su gráfica, la cual está en la figura 3.12.

Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada

Uno de los puntos que nos falta por estudiar es cuándo una función es convexa y cuándo es cóncava. Recordemos la definición.

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que:

La función f es **convexa** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo x, y con $x < y$, tenemos que la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda por arriba de la gráfica de f.	La función f es **cóncava** en el intervalo (a, b), si siempre que escojamos dos valores dentro del intervalo x, y con $x < y$, tenemos que la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda por abajo de la gráfica de f.
	

En las imágenes puedes apreciar un ejemplo de una función convexa y de una función cóncava. Ahora que tienes mayor práctica con las derivadas, podemos dar criterios para determinar cuándo la función es convexa y cuándo es cóncava.

Sea una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y con segunda derivada. Consideremos su segunda derivada.

- La función es cóncava en todos los puntos donde la segunda derivada sea negativa, es decir, los puntos donde $\frac{d^2f}{dx^2}(x) < 0$.
- La función es convexa en todos los puntos donde la segunda derivada sea positiva, es decir, los puntos donde $\frac{d^2f}{dx^2}(x) > 0$.

En la siguiente sección veremos cómo se relaciona esto con los intervalos donde es creciente y decreciente y cómo construir una gráfica complicada a partir de cada fragmento de información.

Ejemplos

1. El ejemplo más sencillo es considerar la función (figura 3.13):

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3.$$

Determinemos las regiones donde es cóncava y convexa, para lo cual es necesario calcular las primeras dos derivadas:

$$\frac{df}{dx}(x) = 3x^2 \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2}(x) = 6.$$

Por el criterio de la segunda derivada sabemos que la función es cóncava en todos los puntos donde la segunda derivada sea negativa, es decir, los números x tales que $6x < 0$, es decir, el conjunto de los números negativos. De forma análoga, podemos concluir que es convexa en el conjunto de los números positivos.

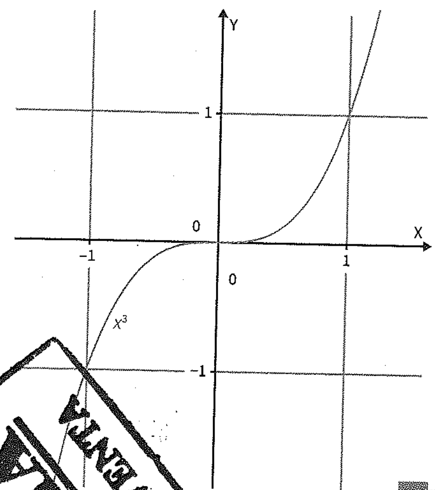


Figura 3.13

2. A veces no vas a poder utilizar el criterio, en esos casos tendrás que recurrir a la definición. Considera la función (figura 3.14):

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

En ésta, tenemos que sus dos primeras derivadas son:

$$\frac{df}{dx}(x) = 1 \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2}(x) = 0.$$

En este caso, el criterio de la segunda derivada no nos dice nada, ya que la derivada siempre es cero, pero aun así es fácil ver que las líneas son siempre cóncavas y convexas, elige dos puntos sobre la gráfica y únelos con una línea recta, esa recta queda encima de la gráfica, lo cual cuenta como quedar sobre la gráfica.

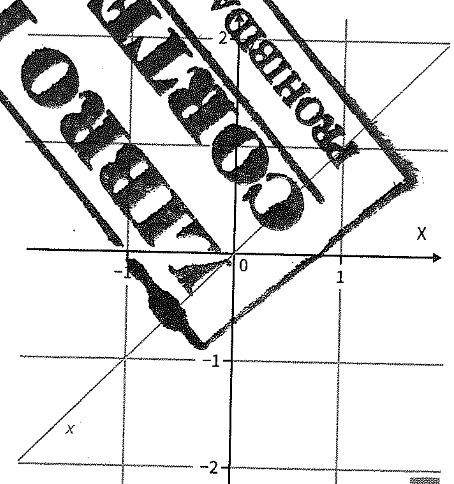


Figura 3.14

Actividad de aprendizaje 4

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios.

1. Determina los puntos de inflexión de estas funciones.

   a. $f(x) = e^x$ b. $g(x) = \frac{1}{x}$ c. $h(x) = \text{sen}(x)$

   d. $k(x) = \tan(x)$ e. $r(x) = x^6 + x^4$

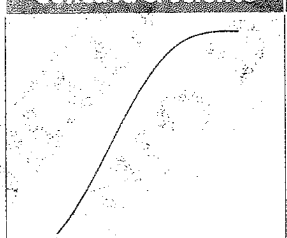
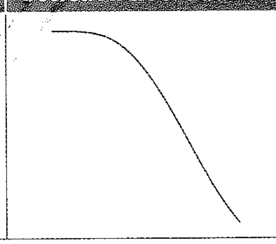
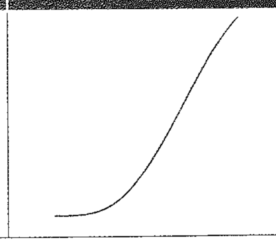
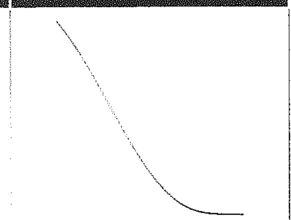
2. Traza un esbozo de la gráfica de las funciones anteriores marcando los puntos críticos, los puntos de inflexión, dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

3. Usa el criterio de la segunda derivada para explicar con todo detalle cómo se comportan las funciones cuadráticas, ¿tienen puntos de inflexión?, ¿cuándo son cóncavas y cuándo convexas?

¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión?

Ya has analizado varias conceptos y propiedades de las funciones y las derivadas, en este momento de tu formación debes aprender correctamente a manipular las propiedades y en los temas siguientes vas a ver cómo aplicar todo lo que aprendiste en ejemplos concretos de modelos más complejos.

En la sección anterior aprendiste a identificar regiones de puntos donde la función es convexa y donde es cóncava, ahora debes saber cómo identificar visualmente esas regiones, esto te servirá para trazar gráficas fácilmente. Para esto, observa la siguiente tabla que resume el tipo de comportamiento de una función.

Cóncava creciente	Cóncava decreciente	Convexa creciente	Convexa decreciente
			

Por ejemplo, considera la función $f(x) = x^3$, cuya gráfica se encuentra en la figura 3.15.

En este caso hemos marcado de color azul la región de puntos donde la función es cóncava creciente y de rojo los puntos donde es convexa creciente.

Como puedes observar, justo en el cero, la función pasó de ser cóncava a convexa y justo en ese punto, la línea tangente a la gráfica en el punto cero corta a la gráfica en dos regiones.

Identificar los puntos cuando la función pasa de cóncava a convexa y viceversa es importante, nos permite entender mejor la función y hace que sea fácil graficar la función por trozos.

En este caso tenemos el siguiente concepto. Considera una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que el punto x_0 es un punto de inflexión si la función pasa de ser cóncava a convexa (o viceversa) justo en el punto x_0.

Para encontrar los puntos de inflexión también disponemos de un criterio, aunque en este caso es un poco más largo.

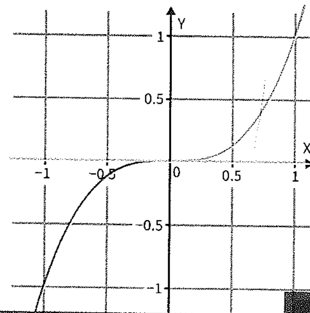


Figura 3.15

Criterio para encontrar los puntos de inflexión

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y con segunda derivada. Los pasos son:

- Calculamos la segunda derivada de f y encontramos los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que la derivada vale cero o no está definida.
- Para cada punto que encontramos en el paso previo, tomamos dos puntos de prueba: por ejemplo, para el punto x_0 tomamos uno más pequeño y otro más grande, digamos y_0 y y_1.
- Usemos el criterio de la segunda derivada para determinar si la función es cóncava o convexa en cada punto de prueba.
- Si la función pasa de cóncava a convexa (o viceversa) diremos que el punto x_0 es un punto de inflexión. Si la función no cambia, ignoramos el punto x_0.

Con todo lo visto, ya puedes graficar cualquier función. En general, la estrategia que debes seguir es:

- Localizar los puntos críticos y determinar si son máximos o mínimos.
- Localizar las regiones donde es creciente y donde es decreciente.
- Localizar las regiones donde es cóncava y donde es convexa.
- En el plano, localizar los puntos críticos y las regiones donde es cóncava y creciente o decreciente, o convexa y creciente o decreciente.
- Ubicar algunos puntos en el plano sobre tu gráfica.
- Usar tu tabla de ejemplos de cómo se comportan las funciones y armar tu gráfica por trozos.

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x + \text{sen}(x)$ y tracemos su gráfica.

Para ello, calculemos la derivada de f y su segunda derivada:

$$\frac{df}{dx}(x)=1+\cos(x) \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2}(x)=-\text{sen}(x).$$

Para encontrar los puntos críticos debemos solucionar el sistema $1 + \cos(x) = 0$, el cual tiene por soluciones al conjunto $\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in Z\}$. Ahora, debemos sustituirlos en la segunda derivada y usando la propiedad de que la función seno es periódica con periodo 2π, obtenemos que:

$$\frac{d^2f}{dx^2}\left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\text{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\text{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=-1.$$

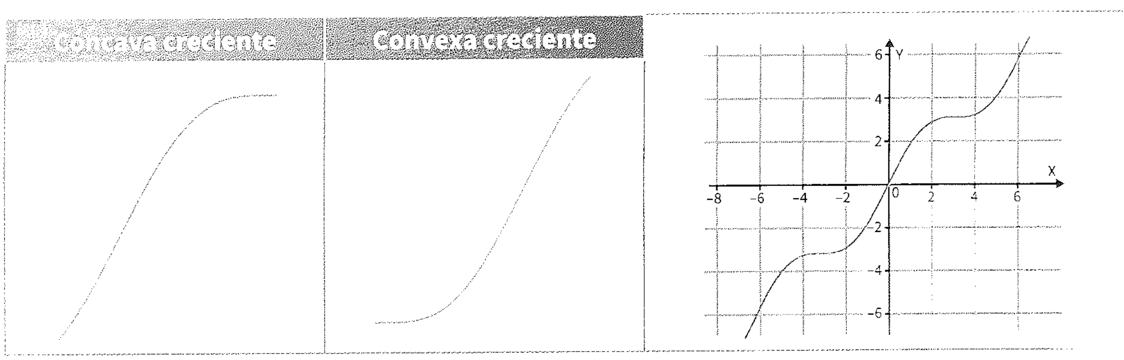
Dado que este valor es negativo, por el criterio de la segunda derivada concluimos que todos esos puntos son máximos.

Ahora ya sabes que la función coseno toma valores entre -1 y 1, por lo tanto, la derivada siempre es positiva, así que la función siempre es creciente.

Finalmente, los posibles puntos de inflexión son aquellos que cumplen $-\text{sen}(x) = 0$ y por tu curso de geometría analítica sabes que la función seno vale cero en el punto cero y π, así que, usando la propiedad de ser periódica concluimos que los puntos donde la segunda derivada vale cero es $\{k\pi \mid k\in Z\}$.

Además, sabemos que $-\text{sen}(x) > 0$ siempre que x esté en el conjunto $\{(2k-1)\pi < x < 2k\pi \mid k\in Z\}$ y de forma análoga $-\text{sen}(x) < 0$ siempre que $\{2k\pi < x < (2k+1)\pi \mid k\in Z\}$.

De esta manera, concluimos que la función es convexa en el primer conjunto y cóncava en el segundo, así todos los puntos $\{k\pi \mid k\in Z\}$ son de inflexión. Por lo tanto, si vamos a nuestra tabla, nos damos cuenta que la gráfica consiste en ir uniendo los trozos.



En la imagen trazamos la gráfica, hazlo también y recuerda graficar algunos puntos y usar toda la información para obtener la gráfica de manera precisa.

Con la información que tenemos podemos estudiar todas las funciones cúbicas. Sea una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, es decir, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determinemos toda la información posible. Comencemos con los puntos críticos, para esto observa que la derivada de f está dada por: $\frac{df}{dx}(x)=3ax^2+2bx+c$.

Así, para encontrar los puntos críticos debemos resolver la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$, la cual, al ser una ecuación cuadrática se puede resolver por la fórmula general, la cual nos dice que:

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-12ac}}{6a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

De esta manera, concluimos que:

- Si $b^2 - 3ac$ es negativo, entonces, la función no tiene puntos críticos.
- Si $b^2 - 3ac$ es cero, entonces, la función tiene sólo un punto crítico en el punto $x=-\frac{b}{3a}$.
- Si $b^2 - 3ac$ es positivo, entonces, la función tiene dos puntos críticos en los puntos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}.$$

Ahora, consideremos la segunda derivada de f, la cual está dada por:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x)=6ax+2b.$$

Para localizar los posibles puntos de inflexión debemos resolver el sistema $6ax + 2b = 0$, lo cual nos dice que el único posible punto de inflexión es $x=-\frac{b}{3a}$.

Hasta aquí podemos hacerlo en general, intentar fórmulas generales sólo hará que su estudio sea tedioso y debas considerar muchos casos. En esta situación es mejor considerar ejemplos.

Imaginemos que $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, de forma que usando la notación previa tenemos que $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 1$ y sus derivadas son:

$$\frac{df}{dx}(x)=3x^2+2x \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2}(x)=6x+2.$$

Por lo tanto, como $b^2 - 3ac = 1$, concluimos que tiene dos puntos críticos en $x = 0$ y $x=\frac{-2}{3}$, y un posible punto de inflexión en $x=\frac{-1}{3}$.

Ahora, determinemos si los puntos críticos son máximos o mínimos, para eso debemos sustituirlos en la segunda derivada, con lo cual obtenemos:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0)=2 \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{-2}{3}\right)=-2.$$

Por el criterio de la segunda derivada, concluimos que en cero hay un mínimo local y en $-\frac{2}{3}$ hay un máximo local.

Ahora, busquemos dónde la función es cóncava o convexa, para esto debemos analizar la segunda derivada: tenemos que $6x+2>0$ sólo pasa cuando $x>-\frac{1}{3}$ y de manera análoga tenemos que $6x+2<0$ siempre que $x<-\frac{1}{3}$.

Así, por el criterio de la segunda derivada concluimos que la función es convexa en el intervalo $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ y cóncava en el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$. Como en el punto $x=-\frac{1}{3}$ la función pasa de cóncava a convexa, concluimos que $x=-\frac{1}{3}$ es un punto de inflexión.

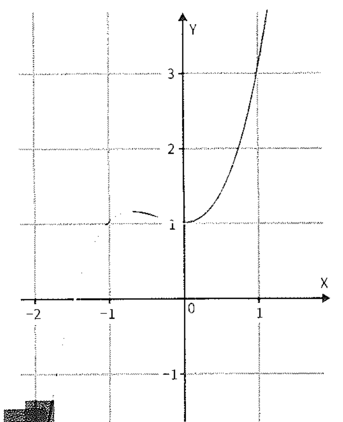


Figura 3.16

Finalmente, para determinar cuándo la función es creciente y decreciente debemos tomar tres puntos auxiliares y_0, y_1 y y_2 tales que $y_0<-\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{3}<y_1<0$ y $0<y_2$, por ejemplo, tomemos $y_0=-1$, $y_1=-0.1$ y $y_2=1$. Con estos puntos concluimos que:

$$\tfrac{df}{dx}(-1)=1,\ \tfrac{df}{dx}(-0.1)=-0.17 \text{ y } \tfrac{df}{dx}(1)=5.$$

Por lo tanto, concluimos que la función es creciente en los intervalos $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)$ y $(0,\infty)$, y es decreciente en el intervalo $\left(\frac{-2}{3},0\right)$.

Observa que la gráfica (figura 3.16) se construye usando cuatro regiones: la línea roja es donde la función es creciente y cóncava, la línea verde donde es decreciente y cóncava, la línea naranja donde es decreciente y convexa y, finalmente, la parte azul donde es creciente y convexa.

Actividad de aprendizaje 5

Usando lo aprendido en este parcial, traza la gráfica, lo mejor que puedas, de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^5-x^4+x-1$
2. $g(x)=\cos(x)-x$
3. $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
4. $j(x)=\sqrt[4]{x^3}$
5. $k(x)=(x-10)^{20}$
6. $r(x)=\operatorname{sen}(x)+5x$
7. $s(x)=e^x+e^{-x}$
8. $t(x)=\cos(2x)$

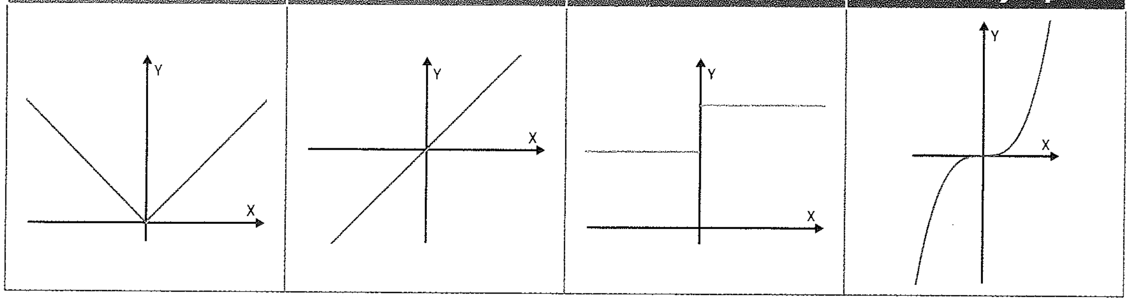
En cada una de estas gráficas debes señalar:

- Su dominio.
- Sus puntos críticos, máximos y mínimos.
- Sus puntos de inflexión.
- Dónde es creciente y decreciente.
- Dónde es cóncava y convexa.

¿Podrías recortar el papel siguiendo esa gráfica?, ¿qué observas?

Ahora ya sabes que estudiar el comportamiento de las gráficas es una tarea que debes hacer con mucha paciencia y dedicación. Hasta este momento has visto los siguientes tipos de gráficas:

Continuas	Diferenciables	Por trozos	Funciones que crecen muy rápido



La primera gráfica es una función continua, es decir, se hace de un solo trazo. Si te imaginaras el plano como una gran hoja de papel podrías recortarlo siguiendo la línea que te determina la gráfica y dividirías al plano en dos secciones y una de ellas tendría una esquina, justamente la existencia de esta esquina significa que la función no es diferenciable en ese punto.

En el segundo caso tienes una función diferenciable. Igual podrías recortar esa línea y dividir al plano en dos partes, pero ahora ninguna de las dos partes va a tener esquinas.

En el tercer caso, la gráfica se parte en dos, es decir, al trazarla tuvimos que separar el lápiz, por lo tanto, no es continua. También podrías recortar esa línea pero el plano no quedaría divido en dos partes.

Finalmente, tienes una función continua sólo en un intervalo y si quisieras recortar esa gráfica te darías cuenta que la tijera tienes que colocarla cada vez más vertical.

Como puedes notar, el hecho de que la línea tangente sea casi vertical (antes representada como la tijera) representa el concepto de asíntota.

Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

Reafirma lo aprendido con los siguientes ejercicios. Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

1. Usando lo que aprendiste en este parcial, traza las gráficas, lo mejor que puedas, de las funciones:

a. $f(x)=\dfrac{1}{x^{10}+1}$ b. $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^8-1}$ c. $h(x)=\dfrac{x^4+x-1}{-9x^4+1}$ d. $j(x)=\dfrac{x^5-x^4+2}{x+1}$

En cada una de estas gráficas debes señalar:

- Su dominio.
- Sus puntos críticos, máximos y mínimos.
- Sus puntos de inflexión.
- Dónde es creciente y decreciente.
- Dónde es cóncava y convexa.
- Localizar todas las asíntotas verticales y horizontales.

2. Lee la siguiente situación y emplea todos tus conocimientos para resolverla.

   En una población de animales hay depredadores y presas. Imagina que las presas crecen de acuerdo con la función $f(t) = 2t^6$ y los depredadores iniciales eran sólo dos y tienen una tasa de crecimiento igual a 1. Llamemos $g(t)$ a la función que representa cómo crecen los depredadores.

   Al considerar la función $\frac{f(t)}{g(t)}$ estamos midiendo cuántas presas le corresponde (se puede comer) a cada depredador.

   Si esa cantidad es mayor que 1 significa que hay mucha comida para los depredadores y si es menor que 1 significa que hay menos comida, y a cada depredador le corresponderá menos comida (comerá menos).

   a. Si las tasas de crecimiento nunca cambian, ¿qué crees que suceda con el sistema? ¿Los depredadores siempre tendrán mucha comida o en algún momento se acabará?
   b. Traza una gráfica de esta función y escribe tus conclusiones basándote en ella.

3. Considera el ejemplo de la actividad anterior. Usando lo que viste en este parcial determina:

   a. Los puntos críticos, máximos y mínimos.
   b. Dónde la función es creciente y decreciente.
   c. Dónde la función es cóncava y convexa.
   d. Las asíntotas.

4. Con toda esta información mejora tu investigación del ejercicio anterior.

   ¿Cómo se comportan ambas poblaciones?, ¿qué significa que la función empiece a decrecer? y ¿qué significa la existencia del mínimo o máximo?

5. Imagina que por una plaga, la tasa de crecimiento de los depredadores es sólo de 0.2, ¿qué sucede en esta ocasión?, ¿ves algún cambio significativo? Determina todos los puntos previos para este ejemplo y trata de obtener conclusiones al ver ambas gráficas.

Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada)

Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la primera derivada y la segunda derivada de una función

Hoy en día, gracias a la tecnología e ingeniería, determinar la velocidad con la que un objeto se desplaza es fácil, por ejemplo, todos los automóviles están equipados con velocímetros, los cuales permiten saber a qué velocidad se mueven, incluso la mayoría de los celulares te permiten determinar con qué velocidad te desplazas debido al uso del GPS, pero hace 500 años, determinar la velocidad con la que se movía un objeto era una situación muy complicada de describir.

Antes de continuar, debemos aclarar qué entendemos por velocidad, para eso primero definiremos el concepto de velocidad promedio.

La **velocidad promedio** es el cambio de posición con respecto al tiempo.

Si denotamos por t_0 y t_1 los tiempos inicial y final, respectivamente, y por p_0 y p_1 las posiciones inicial y final, la velocidad promedio entre el tiempo t_0 y t_1 se denota como:

$$V(t_0,t_1)=\frac{p_1-p_0}{t_1-t_0}.$$

Imaginemos esta situación: te desplazas desde tu casa a la escuela, caminando a paso ligero y observas que cada minuto recorres 36 metros.

Así, podemos asumir que la función que describe cuánto camino has recorrido (en metros) respecto al tiempo (en minutos) está dada por $f(t)$ = $36t$. La gráfica de esta función se ve en la figura 3.17.

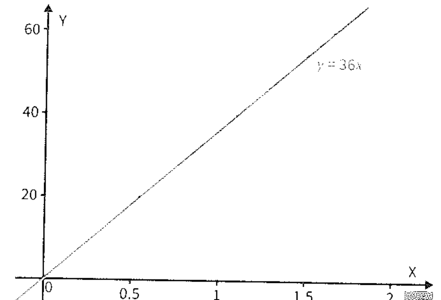


Figura 3.17

Como recordarás, esta función es lineal y su gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es 36. Observando la gráfica puedes notar que tu desplazamiento es muy uniforme, analicemos un poco más, para ello calculemos tu velocidad promedio entre los tiempos 0 y 1 minuto, 0 y 10 minutos y 5 y 10 minutos.

Tiempo	Velocidad promedio
Entre 0 y 1 minuto	$V(0,1)=\dfrac{36-0}{1-0}=36$
Entre 0 y 10 minutos	$V(0,10)=\dfrac{360-0}{10-0}=36$
Entre 5 y 10 minutos	$V(5,10)=\dfrac{360-180}{10-5}=\dfrac{180}{5}=36$

Como te puedes dar cuenta, tu velocidad promedio siempre es la misma: 36 metros por minuto. ¿Qué crees que suceda con la razón de variación? Recuerda que la razón de variación te dice qué tanto varía la función con respecto a qué tanto varían los puntos, en este caso te dice qué tanto varía la distancia con respecto al tiempo.

Previamente, estudiamos las funciones lineales y recordarás que su razón de variación es la pendiente de la línea recta, en este caso 36. Por tanto, la razón de variación coincide con la velocidad promedio.

Otra pregunta que podemos hacer es: ¿exactamente cuál era tu velocidad en el minuto 1? Para obtener tu velocidad precisa, lo mejor es promediar las velocidades que obtenemos:

	Entre 0.5 y 1	Entre 0.9 y 1	Promedio	Entre 1 y 1.1	Entre 1 y 1.5
Velocidad promedio	36	36	36	36	36

Así, concluimos que tu velocidad justo al minuto 1 era de 36 metros por minuto. Este proceso te debe ser familiar, si remplazas velocidad promedio por razón de variación te darás cuenta que lo calculado en realidad es la derivada de la función evaluada en uno.

Observa que hay una relación estrecha entre el cálculo diferencial y la velocidad. A continuación vamos a formalizar toda la teoría.

Considera un objeto que se desplaza y denotamos por $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función que describe la posición del objeto con respecto al tiempo, además, supongamos que la función es diferenciable. Llamemos a la velocidad instantánea del objeto en el tiempo t_0 al número:

$$\frac{df}{dt}(t_0).$$

En nuestro análisis previo, puedes notar que en realidad la velocidad instantánea es un promedio de velocidades promedio.

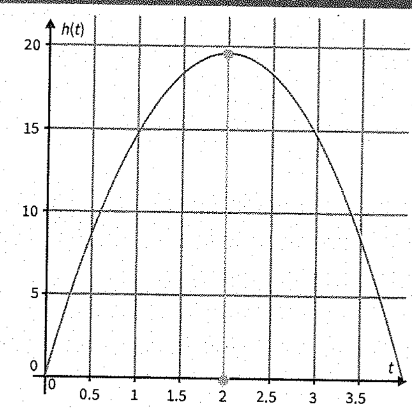
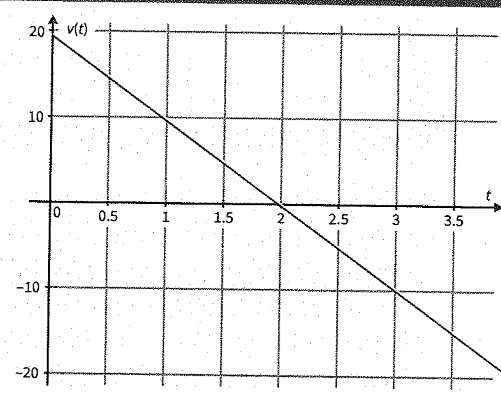
En algunos libros, sobre todo en los de física, cuando se habla de desplazamiento es usual encontrar la siguiente notación:

- La función posición se denota por $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- La derivada de la función posición se denota por $v(t) = r'(t)$.

Retomemos un caso familiar: tienes un arco y lanzas una flecha con un ángulo de inclinación de 45°, la cual sale a 27.77 m/s, recuerda que la función que describe la altura de la flecha está dada por $h(t) = 19.63t - 0.5(9.8)t^2$. Por lo ya visto, si queremos estudiar la velocidad de la flecha debemos derivar esta función:

$$v(t) = \tfrac{dh}{dt}(t) = 19.63 - 9.8t.$$

Analicemos ambas funciones $h(t)$ y $v(t)$, para esto, debes observar las dos gráficas.

Gráfica de $h(t)$.	Gráfica de $v(t)$.
	

En la gráfica de la altura marcamos con una línea naranja el momento en que la flecha alcanza el punto más alto, es decir, su máximo.

Observa que después de ese momento, la flecha empieza a caer. Por otra parte, puedes ver que la gráfica de la velocidad es una línea recta con pendiente negativa. El hecho de que tenga pendiente negativa significa que va perdiendo velocidad (la función es decreciente), veamos algunos valores en la tabla.

Te puedes dar cuenta que hay velocidades negativas, esto sucede porque después de 2 segundos, la flecha pierde altura, por eso se considera negativa.

Tiempo	Velocidad
0	$v(0) = 19.63$
1	$v(1) = 9.83$
2	$v(2) = 0.03$
3	$v(3) = -9.77$
4	$v(4) = -19.57$

Como puedes observar, salvo errores de redondeo, los renglones para 1 y 3 s coinciden, excepto el signo, y lo mismo sucede con los renglones de 0 y 4 s. En cuanto al renglón central podemos asumir que vale cero, lo cual corresponde al momento en que la flecha alcanza su punto máximo (es decir, dos es un punto crítico).

Viendo todo esto concluimos: la flecha sale con una velocidad inicial de 19.63 m/s y poco a poco pierde velocidad debido a la gravedad, hasta que a los 2 segundos pierde toda su velocidad y empieza a caer, recuperando velocidad y a los 4 segundos toca tierra a la misma velocidad con la que inició.

En este caso, vemos que la velocidad no siempre es la misma, así que tiene sentido que analicemos el cambio de velocidad con respecto al tiempo, para lo cual será necesario tener un concepto más.

Determinaremos como **aceleración promedio** al cambio de velocidad con respecto al tiempo transcurrido.

Si denotamos por t_0 y t_1 a los tiempos inicial y final, respectivamente, y por v_0 y v_1 a las velocidades inicial y final, entonces la aceleración promedio entre el tiempo t_0 y t_1 se denota como:

$$a(t_0,t_1)=\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0}.$$

En el caso de la flecha, la velocidad está dada por la función lineal $v(t) = 19.63 - 9.8t$, cuya gráfica es una línea recta e igual que antes puedes ver que la aceleración promedio entre los tiempos t_0 y t_1 coincide con la pendiente de esta línea recta.

Como puedes ver, la aceleración promedio siempre va a ser –9.8, lo cual corresponde al efecto que tiene la gravedad sobre la flecha.

Recuerda que la gravedad es una fuerza de atracción que ejerce la Tierra hacia todos los objetos. En la superficie de la Tierra, la aceleración originada por la gravedad es 9.81 m/s^2, aproximadamente.

¿Qué sucede si quieres conocer la aceleración exactamente en $t = 1$? La idea es la misma que antes, debes tomar varias aceleraciones promedio y redondearlas.

Formalicemos esta parte de la teoría. Considera un objeto que se desplaza y denotamos por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la función que describe la posición del objeto con respecto al tiempo, además, suponemos que la función es diferenciable y su segunda derivada siempre existe.

Llamemos la aceleración instantánea del objeto en el tiempo t_0 al número:

$$\frac{dv}{dt}(t_0)=\frac{d^2f}{dt^2}(t_0).$$

Es decir, la aceleración instantánea es la segunda derivada de la función posición.

La notación que puedes encontrar es:

- La función posición se denota por $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- La derivada de la función posición se denota por $v(t) = d'(t)$.
- La derivada de la función velocidad se denota por $a(t) = v'(t)$.

Ejemplos

1. Imagina que estás parado en la terraza de un edificio de 300 metros y dejas caer una pelota. En el primer parcial se mencionó que este tipo de situaciones están descritas por la ecuación de caída libre. En este caso es:

$$h(t) = 300 - 0.5(9.8)t^2.$$

En la imagen que se presenta puedes ver la gráfica de la función $h(t)$, es importante que notes que ajustamos un poco la escala para que se aprecie mejor la gráfica.

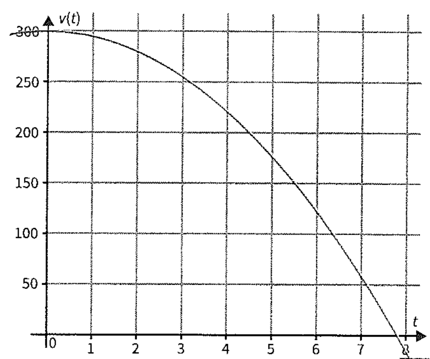


Figura 3.18

En este caso, tenemos que la velocidad y aceleración instantáneas están dadas por las funciones:

$$v(t) = -9.8t.$$

$$a(t) = -9.8.$$

Elegimos algunos valores y analizamos su significado.

Tiempo	Posición	Velocidad instantánea	Aceleración instantánea
0	300 m	0	-9.8 m/s^2
2	280.4 m	-19.6 m/s	-9.8 m/s^2
4	221.6 m	-39.2 m/s	-9.8 m/s^2
6	123.6 m	-58.8 m/s	-9.8 m/s^2
7	59.9 m	-68.6 m/s	-9.8 m/s^2

Observa que la pelota pierde altura conforme transcurre el tiempo, es por eso que la velocidad siempre es negativa. Además, la gravedad es la única fuerza que interactúa con la pelota (omitimos la fricción con el aire y el viento).

Así, la aceleración es la misma constantemente y es negativa porque la gravedad jala a los objetos hacia el centro de la Tierra.

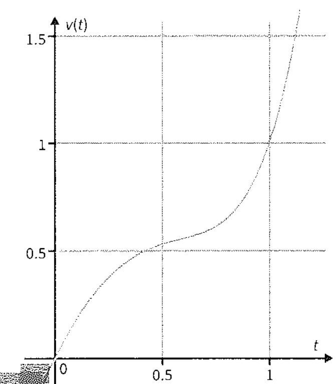


Figura 3.19

2. Un vehículo se desplaza en metros, siguiendo la función $f(t) = t^5 - 2t^2 + 2t$, donde la variable t representa minutos.

Expliquemos su movimiento.

En la figura 3.19 se muestra la gráfica de la función $f(t)$:

$$f(t) = t^5 - 2t^2 + 2t.$$

En este caso, la velocidad y aceleración instantáneas están dadas por las funciones:

$$v(t) = 5t^4 - 4t + 2,$$

$$a(t) = 20t^3 - 4.$$

Elegimos algunos valores y analizamos su significado.

Tiempo	Posición	Velocidad instantánea	Aceleración instantánea
0	0 m	2	-4 m/s^2
0.5	*0.53 m*	*0.31 m/s*	*-1.5 m/s^2*
1	1 m	3 m/s	16 m/s^2
1.5	6.09 m	21.31 m/s	63.5 m/s^2
2	28 m	74 m/s	156 m/s^2

En este caso, la velocidad y la aceleración instantáneas también cambian con respecto al tiempo (son funciones de t).

Dado que el vehículo gana más aceleración, provoca que su velocidad aumente cada vez más rápido, lo cual se refleja en que el vehículo a cada minuto recorre más metros con relación al minuto anterior. Nota que la pendiente del segmento que une los puntos 1.5 y 2 es mucho mayor que la del segmento que conecta a los puntos 0 y 0.5.

Situaciones como esta, donde la aceleración no es constante, están presentes en sistemas más complejos, como ejemplo consideremos contestar: ¿cómo se mueve un avión?

En este caso, la aceleración negativa de la gravedad siempre está presente, pero también hay una aceleración positiva generada por las turbinas del avión y los cambios de la aceleración se reflejan en cómo se mueve la aeronave.

Actividad de aprendizaje 7

Productos esperados

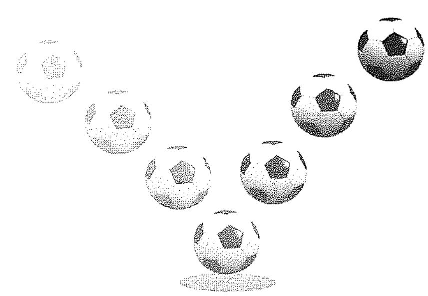
Responde lo que se pide.

1. Considera las funciones que describen cómo cambia la altura de una bala de cañón que se dispara a una velocidad de 100 m/s y con ángulos de inclinación de 30°, 45°, 60° y 80°. Para todos describe:
   a. La función de la velocidad y aceleración instantáneas.
   b. En qué momento la bala de cañón tiene velocidad cero.
   c. Calcula la velocidad y aceleración instantáneas a los 1, 2 y 3 segundos. ¿Cuál bala de cañón va más rápido?
   d. Traza las gráficas (posición, velocidad y aceleración) de cada bala de cañón.
2. Un vehículo se desplaza siguiendo la función $f(t) = 2.5t^7 - 10t^4 + 2t^3 - t^2 + 10t$, en kilómetros, donde la variable t representa horas. Determina:
   a. La función de la velocidad y aceleración instantáneas.
   b. Aproximadamente en qué momento el vehículo tiene velocidad cero.
   c. Calcula la velocidad y aceleración instantáneas a las 1, 2 y 3 horas.
   d. Traza las tres gráficas (posición, velocidad y aceleración) del vehículo y explica su movimiento con la información que obtuviste previamente.

Interpretación física de los puntos singulares

Previamente has estudiado el significado de los puntos críticos de varios modelos económicos, químicos y biológicos, en esta sección veremos cómo se relacionan con la física.

Analizaremos con mucho detalle este ejemplo: imagina que mides 1.8 m y lanzas una pelota de futbol con un ángulo de inclinación de 60° y una velocidad inicial de 4 m/s; al caer la pelota, rebota con un ángulo de inclinación de 45° y una nueva velocidad inicial de 4 m/s.



En este caso, lo primero que se debe de hacer es modelar cómo se mueve la pelota desde que la lanzamos hasta antes de que rebote, para ello recuerda que la ecuación de la altura del tiro parabólico está dada por:

$$y = y_0 + v_0 \text{sen}(\theta)t - 0.5gt^2$$

donde y_0 es la altura inicial, v_0 la velocidad inicial, θ el ángulo con el que se dispara el proyectil y g la gravedad.

En nuestro caso, tenemos que $y_0 = 1.8$, $v_0 = 4\text{m/s}$ y $\text{sen}(60°) = 0.866$, de forma que la ecuación está dada por:

$$y = 1.8 + 3.464t - 4.9t^2.$$

Lo primero a determinar es el momento cuando la pelota toca el suelo, eso quiere decir el momento en que la altura vale cero, para ello debemos resolver el sistema:

$$0 = 1.8 + 3.464t - 4.9t^2$$

cuyas soluciones son 1.055 y −0.3481, en este caso, la solución debe ser la positiva, ya que el tiempo siempre es positivo. De esta manera, tenemos la primera parte de la función que describe cómo cae la pelota, la primera parte está dada por:

$$\begin{aligned} f &: [0,1.055] \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 1.8 + 3.464t - 4.9t^2. \end{aligned}$$

Ahora, debemos determinar cómo se mueve la pelota cuando rebota con un ángulo de inclinación de 45° y una nueva velocidad inicial de 4 m/s. Usa la ecuación de tiro parabólico y comprueba que en este caso la ecuación que describe el movimiento es:

$$y = 2.828(t - 1.055) - 4.9(t - 1.055)^2$$

y por lo tanto, la pelota tocará el suelo nuevamente a los 1.632 segundos.

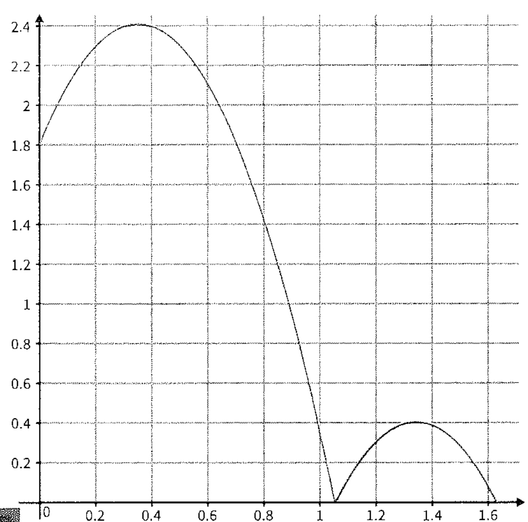


Figura 3.20

Observa que en esta ecuación debemos restar los 1.055 segundos de la ecuación anterior para que modele exactamente lo que deseamos.

Con toda la información, podemos describir la función que modela cómo rebota la pelota, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} f &: [0,1.632] \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1.8 + 3.464t - 4.9t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1.055 \\ 2.828(t-1.055) - 4.9(t-1.055)^2 & \text{si } 1.055 \le t \end{cases} \end{aligned}$$

Te mostramos la gráfica de esta función (figura 3.20), de color azul dibujamos la trayectoria que sigue la pelota antes del primer rebote y de color verde cómo se mueve la pelota después del primer rebote.

Como puedes observar, esta función es continua, pero no es diferenciable en todo su dominio, lo que debemos hacer para calcular su derivada es considerar cada trozo por separado.

Tomando en cuenta esto, la velocidad y aceleración instantáneas de la pelota están dadas por:

$$v:[0,1.632]\rightarrow\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\begin{cases}3.464-9.8t; & 0<t<1.055\\ 2.828-9.8(t-1.055) & 1.055<t\end{cases}$$

y

$$a:[0,1.632]\rightarrow\mathbb{R}$$
$$t\mapsto\begin{cases}-9.8 & 0<t<1.055\\ -9.8 & 1.055<t\end{cases}$$

Es importante observar que los signos de desigualdad son ahora estrictos, esto lo hacemos ya que estamos estudiando las funciones por trozos. Otra observación es que la aceleración siempre es la misma: −9.8, y es porque la gravedad es la única fuerza que afecta a la pelota.

Ahora, nos interesa localizar los puntos críticos de la función $f(t)$, para ello debemos usar su derivada, igualarla a cero y resolver los sistemas de ecuaciones. En este caso, la derivada ya la calculamos y es la velocidad, por lo tanto, las ecuaciones que debemos resolver son:

$$0 = 3.464 - 9.8t \text{ y } 0 = 2.828 - 9.8(t - 1.055)$$

cuyas soluciones son $t = 0.353$ y $t = 1.343$.

Es necesario recalcar la importancia de que interpretes los resultados: Por una parte, hemos determinado los puntos críticos usando la derivada, pero por otra, aquí la derivada es la velocidad instantánea, así que calculamos los momentos en que la pelota tenía velocidad igual a cero.

Como la segunda derivada es la aceleración y siempre es negativa, tenemos que estos dos puntos críticos son máximos, es decir, son los puntos en que la pelota alcanza la máxima altura.

Los puntos que no pudimos analizar por el criterio de la segunda derivada fueron los puntos $t = 0$, 1.055 y 1.632, de los cuales, los dos últimos son los momentos en que la pelota toca el suelo, es decir, son mínimos de la función.

En la figura 3.21 colocamos toda la información que obtuvimos: trazamos de color morado las líneas verticales que señalan la altura máxima que alcanza la pelota, denotamos con puntos naranja los puntos máximos y marcamos con rojo los puntos mínimos.

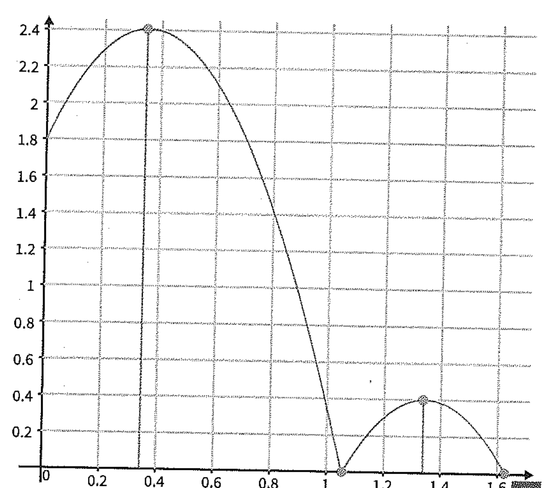


Figura 3.21

Como puedes notar, el análisis de un fenómeno físico se debe realizar con cuidado y paciencia, siempre teniendo presente los conceptos y definiciones a usar.

Los que debes considerar es:

- Comprender por partes el problema y determinar qué tipo de fenómeno estás analizando en cada parte del problema, por ejemplo: caída libre o tiro parabólico.
- Usar tus conocimientos de cursos de física y matemáticas.
- Usar lo que has aprendido en este curso de cálculo, tomando en cuenta la interpretación, por ejemplo: los puntos críticos corresponden cuando la velocidad es cero.
- Juntar toda la información que obtuviste por trozos y hacer una interpretación global, considerando el resultado que se busca obtener.

Actividad de aprendizaje 6

Productos esperados

- **Responde lo que se pide.**

1. Desde lo alto de un edificio de 50 m sueltas una pelota de tenis con una velocidad inicial de 10 m/s. Al caer, la pelota rebota con un ángulo de 30° y la misma velocidad con la que tocó el suelo. El segundo rebote lo hace con el mismo ángulo y con la velocidad con la que impacta el suelo.

   Elabora un modelo que explique cómo se mueve la pelota y determina:

   a. La función de la velocidad y aceleración instantáneas.
   b. En qué momento la pelota tiene velocidad cero.
   c. Los máximos y mínimos.
   d. Traza las tres gráficas (posición, velocidad y aceleración) de la pelota y explica su movimiento con la información que obtuviste previamente.

2. Imagina que disparas varias veces un cañón con una velocidad inicial de 80 m/s y con ángulos de inclinación de 10°, 45°, 80° y 90°.

   En cada una de estas situaciones:

   a. Escribe las funciones que describen cómo se mueve la bala de cañón.
   b. Calcula las derivadas de las cuatro funciones que describen la altura de la bala de cañón en el tiempo $t = 1$, primero por la definición y después usando las propiedades vistas.
   c. Al finalizar, escribe cuál es la ventaja que encuentras al usar las propiedades o la definición.

3. Anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

TIC

En el video se abordan conceptos fundamentales de física que ayudan a entender problemas de movimiento.

bkmrt.com/BdkcCg

Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos no mayores a la tercera derivada

En este libro hemos destacado la importancia del cálculo a través de ejemplos concretos y en todos ellos te has dado cuenta que un paso fundamental es que derives de manera correcta distintos tipos de funciones.

Para lograrlo, debes efectuar tus cuentas con cuidado, paciencia y practicar mucho, como todo en la vida… la práctica hace al maestro.

Ahora repasaremos las propiedades que vimos hace poco para calcular las derivadas de distintas funciones.

1. Polinomios sin factorizar.

   Las funciones del tipo $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ se denominan polinomiales, ya que la regla de correspondencia está dada por un polinomio. Este tipo de funciones tienen derivadas de todos los órdenes y siempre existen.

   Usando las propiedades 3 y 4 que vimos en el tema de derivadas, vemos que su derivada es:

$$\tfrac{df}{dx}(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

   Como puedes notar, la derivada de una función polinomio de grado n es un polinomio de grado $n-1$. Así, obtenemos que:

$$\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) = 0.$$

2. Polinomios factorizados

   La mejor manera de derivar polinomios que se encuentren factorizados es usando las propiedades 3, 4, 5 y 7.

   Por ejemplo, considera el polinomio $f(x) = (ax+b)^n$.

   De tu curso de álgebra debes saber que el polinomio $(ax+b)^n$ se puede escribir usando el binomio de Newton o el triángulo de Pascal y luego puedes usar lo que vimos en el punto anterior, pero esta manera es muy poco eficiente.

   Lo que debes considerar son las funciones $h(x) = ax + b$ y $j(x) = x^n$.

Así, tienes que $f(x) = j(h(x))$, ahora las derivadas de $h(x)$ y $j(x)$ son:

$$\frac{dh}{dx}(x)=a \quad \text{y} \quad \frac{dj}{dx}(x)=nx^{n-1}.$$

Ahora, por la propiedad 7, tenemos que:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{d(j\circ h)}{dx}(x)=\frac{dj}{dx}(h(x))\cdot\frac{dh}{dx}(x)=n(ax+b)^{n-1}\cdot a.$$

3. Funciones racionales

Si tienes una función racional $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, antes de calcular su derivada debes asegurarte de que el punto que deseas evaluar en la derivada forme parte del dominio de la función.

Si esto pasa, para calcular la derivada sólo debes usar los dos puntos anteriores y las propiedades 5 y 6.

Por lo tanto, la derivada de la función racional está dada por:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{p'(x)q(x)-q'(x)p(x)}{\left(q(x)\right)^2}.$$

En esta ocasión, usamos la notación $p'(x)$ para denotar la derivada de p con respecto a x, hicimos esto para que la fórmula sea más sencilla de escribir y recordar.

4. Funciones trigonométricas

Cuando trabajas con funciones trigonométricas, no existe como tal una regla o algoritmo, lo mejor que puedes hacer es recordar las propiedades y que:

$$\text{sen}'(x) = \cos(x) \text{ y } \cos'(x) = -\text{sen}(x).$$

Hemos vuelto a denotar por $\text{sen}'(x)$ a la derivada de seno en el punto x para que la notación sea más sencilla.

Veamos dos ejemplos de funciones trigonométricas:

- Denotemos por $f(x) = \tan(x)$ y vamos a calcular su primera derivada. Como debes recordar de tu curso de geometría, tenemos que $\tan(x)=\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, así que usando las propiedades 5 y 6 tenemos que:

$$\frac{df}{dx}(x)=\tan'(x)=\frac{\text{sen}'(x)\cos(x)-\cos'(x)\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

De esta manera, concluimos que la derivada de la tangente es la secante al cuadrado.

Denotemos por $f(x) = \text{sen}(2x)$ y calculemos su primera derivada. Puedes intentar calcular esta derivada usando la identidad trigonométrica para al ángulo doble, pero eso sería mucho trabajo, lo que debes hacer es considerar las funciones $j(x) = 2x$ y $k(x) = \text{sen}(x)$, así, tienes que $f(x) = k(j(x))$, ahora por la propiedad 7 concluimos que:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{dk}{dx}(j(x))\cdot\frac{dj}{dx}(x)=\cos(2x)\cdot 2.$$

Nota que lo fundamental es que recuerdes las derivadas del seno y del coseno y luego simplemente con la práctica identificarás patrones para calcular derivadas trigonométricas de manera sencilla.

5. Funciones trigonométricas inversas

En tus cursos de geometría y trigonometría viste las funciones trigonométricas inversas: arcsen(x) y arccos(x).

Con lo estudiado hasta ahora, no es posible que calcules las derivadas de estas funciones, pero existen tablas para calcularlas fácilmente.

Función	Derivada
arcsen(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos(x)	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan(x)	$\frac{1}{1+x^2}$

Usando la tabla y tus propiedades podrás calcular otras derivadas, por ejemplo: sea $f(x) = \text{arcsen}(2x + 1)$, calculamos su derivada usando la propiedad 7 y las funciones auxiliares $j(x) = \text{arcsen}(x)$ y $k(x) = 2x + 1$:

$$\frac{df}{dx}(x)=arcsen'(2x+1)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\cdot 2.$$

Es importante recalcar que para determinar las derivadas debes tomar en cuenta el dominio de la función, en el caso previo, la expresión que obtuvimos está bien determinada para todos los números x tales que $-1 < 2x + 1 < 1$, para otros valores de x la derivada no existe, así que la expresión anterior deja de tener sentido.

6. Funciones exponenciales y logarítmicas

El último tipo de funciones que vamos a analizar son las funciones exponenciales y logarítmicas. Para el caso del logaritmo, en cualquier base, otra vez no vas a poder determinar sus derivadas con lo que hemos visto en el curso, pero siempre existe una fórmula general, la cual te será de utilidad.

Función	Derivada
$f(x)=\log_a x$	$\frac{df}{dx}(x)=\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$

Una vez que aprendas a identificar las derivadas y seas ágil con los cálculos manuales, te darás cuenta que calcular las derivadas no es complicado e incluso, se vuelve algo rutinario. Recuerda: la práctica hace al maestro.

Actividad de aprendizaje 9

Calcula las primeras tres derivadas de las funciones.

1. $f(x) = 10(3x^2 + 2x - 5)^6 - 10x$
2. $f(x) = \cos(\text{sen}(x))$
3. $f(x) = \text{arcsen}(x) - \arccos(x)$
4. $f(x) = 2^{x^2-9x+1}$
5. $f(x) = \text{sen}\left(x^2 + \cos(3x)\right)$
6. $f(x) = \left(\text{arcsen}(x) - \text{sen}(x)\right)^4$
7. $f(x) = \dfrac{(10x^2-7)^3}{(x+1)^5} - (x^4+12)^{-4}$
8. $f(x) = \dfrac{2^{\text{sen}(x)}}{\cos(x)}$
9. $f(x) = \text{arcsen}(x^2) + 5x^3$
10. $f(x) = \text{arcsen}(\text{sen}(x))$
11. $f(x) = a^x - a^{-x} + x^a - x^{-a}$
12. $f(x) = 2^{x^3}\ln(x^3)$
13. $f(x) = \dfrac{\pi^{\cos(x^3)+x}}{\left(\cos(x^3)+x\right)^{\pi}}$
14. $f(x) = \dfrac{\text{sen}(5x)}{\tan(x)} - \cos(x^3)$
15. $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{(x^{10}+16x^8+20)^4 x^3}}{(x+3)^{-10}}$

¿Existen caminos directos para derivar? ¿Qué métodos conocemos?

Como puedes notar, calcular las derivadas es una tarea mecánica muy importante, en esta sección hablaremos un poco acerca de cómo se calculan las derivadas usando:

- La definición
- Las propiedades
- Otros métodos

Por definición

Para que tu desarrollo sea completo y con un mayor formalismo, en esta sección veremos brevemente las definiciones formales de límites y derivadas, lo cual nos permitirá aclarar a qué nos referimos cuando queremos calcular una derivada por definición.

Considera una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto x_0.

Antes definimos de manera informal al límite de f en el punto x_0 como un redondeo, ahora veamos formalmente cómo se define el límite.

Diremos que el límite de la función f cuando x tiende a x_0 es a si para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si se cumple que $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces, debe pasar $|f(x) - a| < \varepsilon$. El límite se denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Recuerda que la derivada de la función f en el punto x_0 se definió como:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Así que, usando la definición de límite es posible calcular una derivada, a este proceso se le dice calcular una derivada por definición.

Ejemplo

Usando la definición calculemos la derivada de la función $f(x) = x^2$.

Calcularemos el límite: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$.

Proponemos que ese límite es $2x_0$, para demostrarlo consideramos un $\varepsilon > 0$ y tomamos $\delta = \varepsilon$, ahora observa que siempre que $x - x_0$ sea distinto de cero tenemos que:

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = (x + x_0).$$

De esta manera, concluimos que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $\left| \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} - 2x_0 \right| < \varepsilon$ ya que:

$$\left| \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} - 2x_0 \right| = |x + x_0 - 2x_0| = |x - x_0|.$$

Por las propiedades

El conjunto de propiedades y técnicas que hemos visto en realidad son consecuencias del uso de la definición, todas esas propiedades han sido demostradas y su validez es cierta siempre que tengas todas las hipótesis.

En este caso, para usar las propiedades sólo debes tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Identificaste cada parte de la función.
- Cada parte cumple todas las hipótesis de las propiedades.
- Corroborar que no cometes un error de signo, agrupación u orden.

Una vez que estás seguro que has revisado todos los pasos previos, el uso de las propiedades te debe dar la derivada sin ningún error.

Ejemplo

Sólo para ejemplificar la diferencia con el método de definición, calculemos la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto x_0, en este caso, vemos que la función es monomial y que se cumplen todas las hipótesis de la propiedad 3, así que concluimos que la derivada de f en el punto x_0 es $2x_0$. Nota que calcular la derivada por las propiedades siempre es más sencillo que por la definición.

En muchas situaciones de la vida, calcular las derivadas de las funciones que modelan distintas situaciones no es tan sencillo, en ocasiones incluso es imposible dar una fórmula cerrada de cómo se calculan las derivadas.

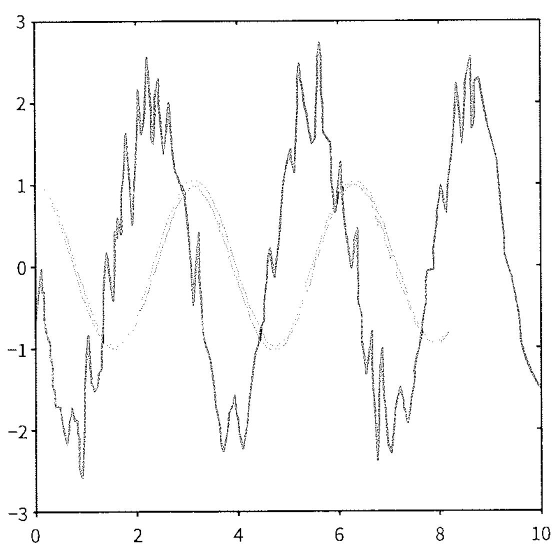


Figura 3.22

Por ejemplo, considera una situación cuyo modelo esté dado por la función $\cos(2t)$, muchas veces a estos modelos se les debe añadir "ruido" y básicamente es para reflejar el error que hay en las mediciones y en los aparatos, este ruido siempre es muy pequeño.

En la figura 3.22 puedes ver de naranja la gráfica de la función $\cos(2t)$ más ruido, la cual se parece mucho a la gráfica de $\cos(2t)$ y de azul a la derivada de $\cos(2t)$ más ruido, en este caso, puedes ver que la derivada tiene una forma muy extraña, ya no se parece a la derivada del $\cos(2t)$.

En estos procesos hay varias técnicas para aproximar la derivada, las cuales con el uso de las computadoras son muy buenas aproximaciones. La idea es la misma que viste en este libro, la computadora toma miles o millones de puntos y, usándolos, aproxima la derivada con un margen de error suficientemente pequeño, tan pequeño como sea necesario.

También te podrás dar cuenta que a veces las derivadas son mecánicas y repetitivas, así que no es complicado elaborar ciertos algoritmos que permitan que las computadoras calculen de manera eficiente algunas derivadas.

Actividad de aprendizaje 10

Productos esperados

Responde lo que se pide. Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

1. Calcula, usando la definición, estas derivadas.

a. $f(x) = c$ b. $f(x) = x$ c. $f(x) = x^4$

2. Investiga acerca del tema de la derivación numérica en distintos libros o páginas de internet de confianza.

3. Elabora en tu cuaderno un resumen con toda la información que consigas, recuerda escribir tus referencias.

4. Elabora un esbozo de un algoritmo para calcular derivadas de polinomios.

5. Si sabes programar elabora un pequeño código que calcule derivadas de polinomios usando ese algoritmo.

6. Una empresa pronosticó que su capital para los siguientes diez años estará dado por la función $f(x) = 10x^3 - 10x^2 + 0.5x + 1$.

7. Un fenómeno físico se encuentra modelado por la función:

$$f:[0,4\pi]\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\begin{cases}\operatorname{sen}(x) \text{ si } 0\leq x\leq 2\pi\\ \operatorname{sen}\left((x-2\pi)^2\right) \text{ si } 2\pi\leq x\leq 2\sqrt{\pi}+2\pi\\ \operatorname{sen}\left((x-2\sqrt{\pi}-2\pi)^3\right) \text{ si } 2\sqrt{\pi}+2\pi\leq x\leq 4\pi\end{cases}$$

En ambas situaciones:

a. Encuentra los puntos críticos de las funciones.

b. Localiza las regiones donde la función es creciente y donde es decreciente.

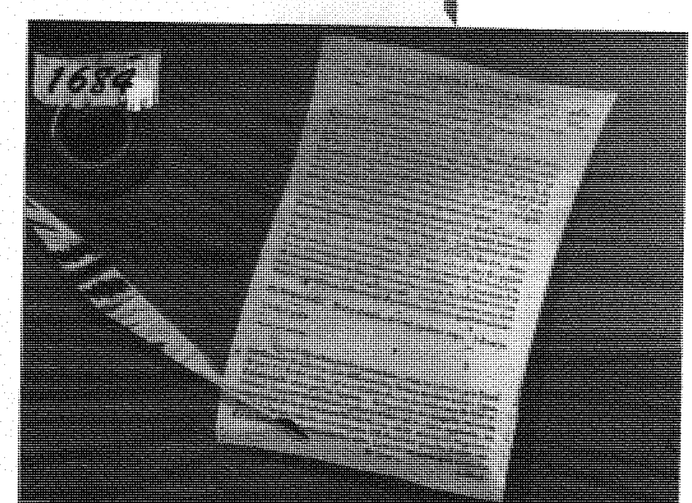
c. Localiza los máximos y mínimos.

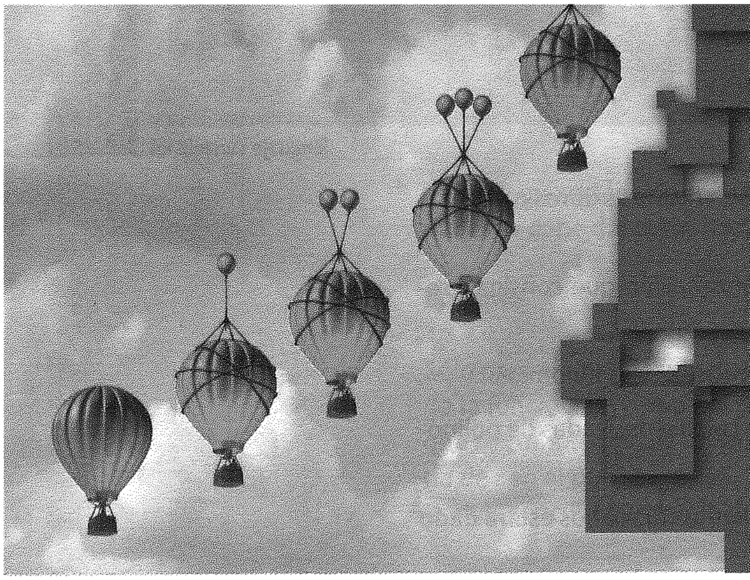
d. Con toda la información traza las gráficas en tu cuaderno. Resalta las regiones donde las funciones son crecientes o decrecientes.

Controversia matemática del siglo XVII

Cuando el escándalo creció, Leibniz, erróneamente, acudió a la Royal Society para que resolviera el problema. Como Newton era el presidente de la sociedad, nombró a amigos suyos para que investigaran y él mismo escribió el informe respectivo, gracias al cual la Royal Society acusó a Leibniz de plagio.

Con el tiempo se concluyó que ambos desarrollaron el cálculo de manera independiente, prefiriéndose la notación de Leibniz. Así, si bien existe toda evidencia de que Newton fue el primero, la paternidad del cálculo se les atribuye a ambos.





Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes)

Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras)

Finalizaremos nuestro estudio del cálculo diferencial y de los procesos de cambio analizando dos situaciones un poco más complejas donde tengas que utilizar todo lo que has aprendido.

Cambio continuo

Imagina una situación como la siguiente:

Figura 3.23

Un laboratorio está trabajando con un tipo especial de bacteria, al inicio del experimento había sólo 20 bacterias y su tasa de crecimiento por cada hora era de 0.3.

Después de un día, a la población de bacterias que había se le aplicó una nueva fórmula, por lo cual la tasa de crecimiento cambio a -0.2.

El medicamento se considera efectivo si en sólo ocho horas la población de bacterias se reduce al 10% original del momento en que se aplicó.

Con toda la información, ¿consideras que el experimento fue un éxito? Elaboremos un informe detallado del experimento.

Analicemos el problema por partes.

Iniciemos entendiendo cómo se comporta el experimento las primeras 24 horas, para ello cabe notar que tenemos un problema de crecimiento exponencial y los valores son: 20 como población inicial, 0.3 es la tasa de crecimiento y el parámetro independiente es t que denota horas.

Así, la función que describe cómo crecen las bacterias está dada por:

$$\begin{aligned} f:[0,24] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 20(1.3)^t. \end{aligned}$$

Es importante que notes que el dominio es el intervalo cerrado [0, 24], esto lo dedujimos porque las bacterias crecen sólo las primeras 24 horas. En este caso, su gráfica está en la figura 3.24.

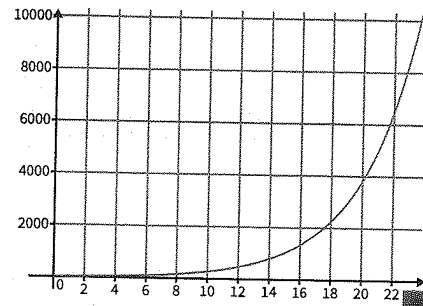


Figura 3.24

Lo que podemos hacer antes es analizar esta parte del experimento. En este caso, la derivada de f es:

$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dx}:(0,24) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 5.24(1.3)^t. \end{aligned}$$

Es importante que notes que ahora el dominio es un intervalo abierto y como la derivada siempre es positiva y nunca es cero, concluimos que las bacterias siempre van a crecer y no tienen un máximo en su crecimiento. Además, dado que $f(24) = 10\,856$, concluimos que a las 24 horas del inicio del experimento había 10 856 bacterias.

Ahora, analicemos qué sucede en las siguientes 24 horas. En este caso, volvemos a tener un problema de crecimiento exponencial y los valores son: 10 856 como población inicial, −0.2 es la tasa de crecimiento y el parámetro independiente es t que denota horas, por tanto, la función que describe cómo decrecen las bacterias está dada por:

$$\begin{aligned} g:[24,48] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 10856(0.8)^{t-24}. \end{aligned}$$

Nota que el dominio es el intervalo cerrado [24, 48], esto lo dedujimos porque es hasta después de las 24 horas que se aplica el medicamento y decidimos analizar el experimento hasta las 48 horas. Además, ve que el parámetro t tiene una resta de 24, esto porque a las 24 horas se reinicia el proceso de crecimiento (ahora decrecimiento). En este caso, su gráfica es la que se muestra en la figura 3.25.

Lo que podemos hacer antes de continuar es analizar esta parte del experimento. Aquí, la derivada de g es:

$$\begin{aligned} \tfrac{dg}{dx}:(24,48) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -2422.446(0.8)^{t-24}. \end{aligned}$$

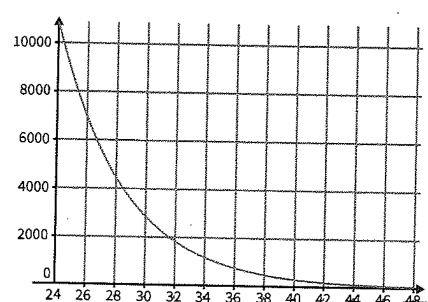


Figura 3.25

En esta situación, la derivada siempre es negativa, eso quiere decir que las bacterias empiezan a morir conforme pasa el tiempo, esto se refleja en que la curva pierde altura conforme pasa el tiempo.

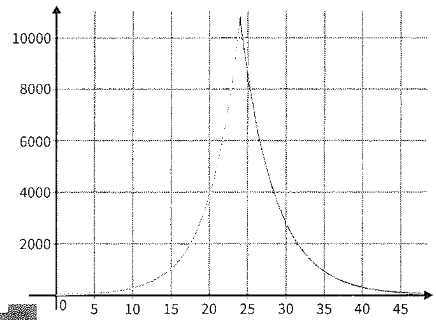


Figura 3.26

Ahora, podemos unir todos los trozos y formar una sola función y gráfica.

$$\frac{dh}{dx}:[0,48]\to\mathbb{R}$$

$$t\mapsto\begin{cases} 20(1.3)^t; & 0\le t\le 24\\ 10856(0.8)^{t-24}; & 24\le t\le 48\end{cases}$$

Nota que lo único que hicimos fue ensamblar cada pieza que analizamos previamente.

Sabemos que a las 24 horas había en total $h(24)$ = 10 856 bacterias y a las 32 horas sólo quedaban $h(32)$ = 1 821 bacterias. Cuando se aplicó el medicamento había 10 856 bacterias, para que el medicamento se considere exitoso se desea que $h(32)\le 1\,085.6$, lo cual desafortunadamente no es el caso, a las 32 horas queda casi 17 % de las bacterias.

Las noticias no son tan malas para el laboratorio porque la gráfica después de las 24 horas es decreciente, así que seguro todas las bacterias mueren, sólo que no tan rápido como se deseaba.

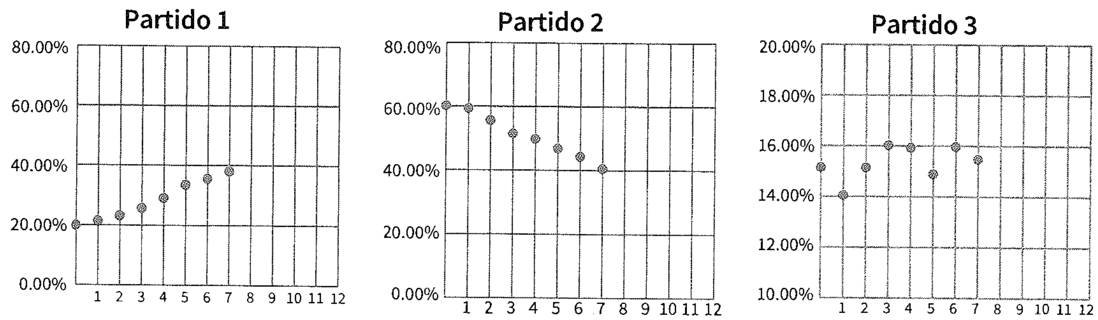
Modelos donde la variable independiente es discreta, es decir, son los naturales o enteros, surgen de manera natural en fenómenos donde no se pueden hacer observaciones continuas, por ejemplo, piensa en las relaciones de precio unitario-costo, aquí, dado que pagas por pieza o producto entero, no tiene sentido hablar de 3/4 de un objeto, en este caso, el sistema es discreto.

Apliquemos lo aprendido de los sistemas continuos para este tipo de modelos. Imagina la situación: se acercan las elecciones para el puesto de presidente municipal, una agencia ha estado haciendo encuestas mensuales acerca de la preferencia de las personas de los tres partidos principales y los resultados son:

	Partido 1	Partido 2	Partido 3
Enero	18.5 %	61.1 %	15.1 %
Febrero	21.3 %	59.1 %	14.1 %
Marzo	23.6 %	55.2 %	15.2 %
Abril	25.9 %	51.1 %	16.1 %
Mayo	29.1 %	49.8 %	15.9 %
Junio	33 %	47.3 %	14.9 %
Julio	35.1 %	44.1 %	16.1 %
Agosto	37.2 %	40 %	15.5 %

Las elecciones son en el mes de diciembre, si las tendencias no cambian, ¿quién crees que sea el ganador de las elecciones?

Para darnos una mejor idea tracemos tres gráficas:



En las gráficas puedes observar que:

- El Partido 1 gana votos gradualmente mes con mes, de hecho su gráfica se asemeja a una línea recta con pendiente positiva.
- El Partido 2 pierde votos gradualmente mes con mes, de hecho su gráfica se asemeja a una línea recta con pendiente negativa.
- El Partido 3 se mantiene casi constante, sus votos no varían mucho mes con mes.

Si las tendencias no cambian, podemos deducir que en diciembre el Partido 1 ganará rotundamente.

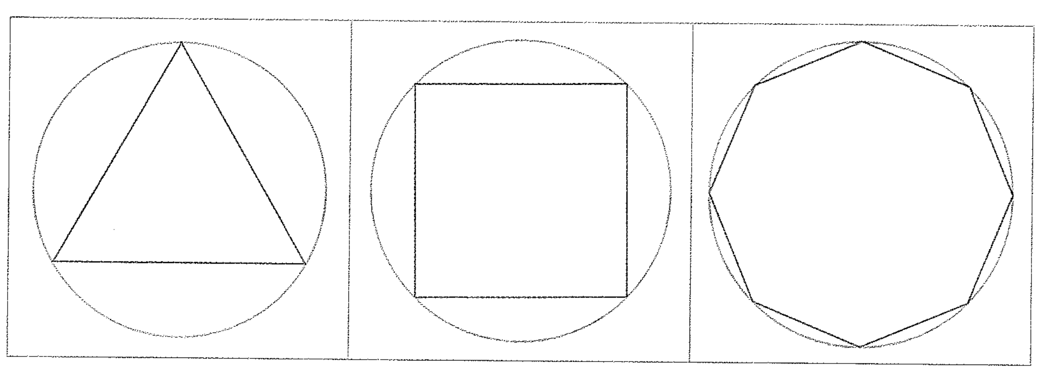
Actividad de aprendizaje 11

Lee atentamente cada parte de la actividad y responden lo que se pide.

1. Usemos los conceptos vistos en este curso para probar la fórmula del área de un círculo. La idea en la que nos basaremos será en el método exhaustivo, observa las imágenes.

   Observa que si fijamos un círculo y vamos construyendo polígonos regulares inscritos en la circunferencia, las áreas se parecen cada vez más.

   Siguiendo una serie de pasos comprobarás que, en efecto, esto te da el área del círculo.



De ahora en adelante r siempre será el radio del círculo y dado un polígono regular de n lados P_n su ángulo central lo denotaremos por θ.

2. Usando lo visto en tu curso de geometría y trigonometría, deduce las igualdades:

   - Tienes que $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$, observa que medimos los ángulos en radianes.
   - Cada lado del polígono P_n mide $L = 2r \cdot \text{sen}(\theta_n)$.
   - La apotema del polígono P_n mide $A = r \cdot \cos(\theta_n)$.
   - El área del polígono P_n es $Area_n = \frac{nr^2 \text{sen}(2\theta_n)}{2}$.

3. Usando el hecho de que $\lim_{n\to\infty}\left[n \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right] = 4\pi$, comprueba que:

$$\lim_{n\to\infty} Area_n = 2\pi r^2.$$

Para corroborar esté hecho, completa la tabla:

Área$_n$					

Observa que para cada polígono P_n tiene una región que queda fuera del polígono y dentro del círculo, denotaremos esa región por S_n, en la figura 3.27 puedes ver de color morado una parte de la región de S_n. De esta manera tenemos que:

$$Área_{circulo} - Área_n = Área_{S_n}$$

En lugar de estudiar la región S_n, vamos a estudiar el área del siguiente cuadrado C_n (figura 3.28). Es claro que el área de la región morada es más pequeña que la del cuadrado C_n.

4. Usando lo que viste en el punto 2. comprueba que:

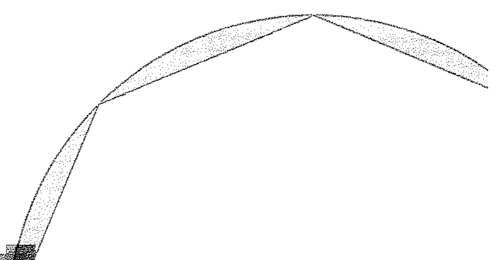


Figura 3.27

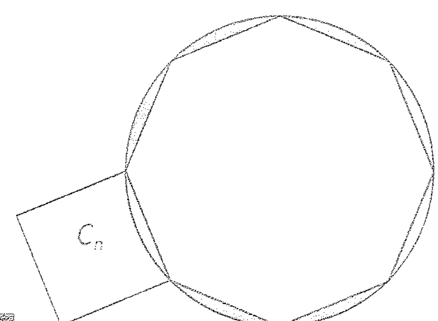


Figura 3.28

   - Cada lado del cuadrado C_n mide $2r \cdot sen(\theta_n)$.
   - Usando el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0$, deduce que:

$$\lim_{n\to\infty} Area_{C_n} = 0.$$

c. Para corroborar este hecho, completa la tabla:

	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$	$n = 100\,000$	Redondeo
$Área_n$						

d. Con esto da un argumento de que $\lim_{n\to\infty} Area_{S_n} = 0$.

e. Usando la igualdad $Área_{circulo} - Área_n = Área_{S_n}$, demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} Área_{circulo} - \lim_{n\to\infty} Área_n = Área_{circulo} - \lim_{n\to\infty} Área_n = \lim_{n\to\infty} Área_{S_n}$$

5. Usando las cuentas, concluye que:

$$Área_{circulo} = 2\pi r^2.$$

Es importante que te des cuenta de la importancia de la última fórmula. Desde la época de los griegos se estimaba con cierto grado de precisión el área del círculo, pero no fue hasta la invención del cálculo cuando se logró dar una fórmula con un argumento lógico que la sustentara.

Muchas veces es mejor encontrar formas de localizar los puntos críticos sin necesidad de resolver demasiadas ecuaciones, a veces sólo es necesario saber algunos trucos.

Ejemplos

1. Considera la función $f(x) = \text{sen}(x)$, vamos a determinar los ceros de f y de su derivada. En este caso, sabes que 0 y π son ceros de la función y dado que la función seno tiene periodo igual a 2π concluimos que el conjunto de ceros es $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

   Por otra parte, la derivada de f es $f'(x) = \cos(x)$, nuevamente usando el periodo del coseno, concluimos que el conjunto de ceros es $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Considera la función $f(x) = 5x^3 + x$. ¿La función tiene puntos críticos? La derivada de la función es $f'(x) = 15x^2 + 1$, en este caso observa que $15x^2$ siempre es un número positivo o cero y uno es claramente positivo, así que la suma siempre es positiva, es decir, nunca vale cero. De esta manera sencilla concluimos que la función $f(x)$ no tiene puntos críticos.

Actividad de aprendizaje 12

Productos esperados

Estudia los ejemplos anteriores y responde lo que se pide. Al finalizar, anexa este trabajo a tu portafolio de evidencias.

1. Usando estas ideas, calcula los ceros de las siguientes funciones y de sus primeras tres derivadas. Intenta no hacer cuentas, sólo dar argumentos que justifiquen tu razonamiento.

   a. $f(x) = \text{sen}(2x)$
   b. $f(x) = \tan(x)$
   c. $f(x) = 2^x$
   d. $f(x) = x^9 + x$
   e. $f(x) = 2^{\text{sen}(x)}$
   f. $f(x) = x$

Suma anécdota

Como te habrás dado cuenta, al vivir en comunidad nacen problemas o situaciones que deben ser atendidos por todos sus integrantes. Es importante que formes parte del cambio positivo de tu comunidad y logres un impacto con la gente que te rodea.

Figura 3.29

Igor Tamm

A lo largo de la historia, la forma en que se organiza la comunidad ha ido cambiando, la humanidad ha pasado por varias revoluciones y en varias ocasiones hubo matemáticos que intervinieron de una u otra forma, tal es el caso del matemático y físico Ígor Tamm (Vladivostok, 8 de julio de 1895 - Moscú, 12 de abril de 1971) ganador del Premio Nobel de Física compartido, en 1958 por el descubrimiento del Efecto Cherenkov.

Durante la Revolución rusa, Tamm fue apresado por un grupo de anticomunistas que creyeron que era un agitador comunista, lo llevaron ante su jefe y éste le preguntó a que se dedicaba para ganarse la vida, a lo cual Igor le contestó que era matemático.

—Está bien— dijo el jefe, mientras se colocaba las cartucheras con las balas y las granadas alrededor del cuello.

—Determina el error que se produce cuando la aproximación mediante series de Taylor a una función (estas series son una manera de aproximar valores de la función usando una suma infinita de las derivadas de la función) se trunca a partir del término n-esimo, si lo haces correctamente te dejaremos en libertad, si fallas te fusilaremos.—

Con pulso tembloroso, Tamm calculó lo que le pedía, escribiendo con sus dedos en el polvo. Al acabar, el cabecilla echó una rápida mirada al resultado y lo dejo marchar.

Tamm jamás se enteró quién era el líder anticomunista, pero sin duda, saber matemáticas le salvó la vida en esa ocasión.

¿Cómo colaborarías con tu comunidad con tus aptitudes?

____

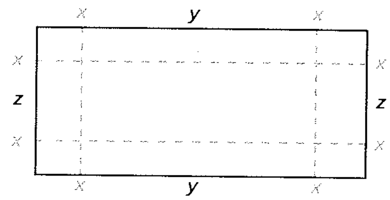
¿Qué habillidades te gustaría desarrollar para contribuir a tu localidad?

____

Proyecto integrador

Lee la situación y desarrolla los pasos.

Imagina que tu lámina tiene de largo y cm y de alto z cm, de esa lámina, debes recortar pequeños cuadrados de x cm de cada lado, tal y como marca la imagen.



1. El primer paso es que corrobores las siguientes formulas:

   Área de la base = $(z - 2x)(y - 2x)$.

   Altura de la caja = x.

   Volumen de la caja = $(z - 2x)(y - 2x)x$.

2. Como te puedes dar cuenta, el volumen depende del tamaño del cuadrado que vas a quitar. Usa lo que viste en tu curso de cálculo diferencial para:

   Encontrar los puntos críticos de la función volumen.

   Determinar cuál es el máximo.

3. Una vez que tienes localizado el volumen máximo, compara las cajas que elaboraste en la sección anterior y compáralas con las medidas óptimas.

Con esto, elabora al menos una caja con sus medidas óptimas de la forma más precisa que puedas.

Hacia la prueba Planea

Practica tu participación en la prueba Planea con este examen.

1. Un objeto se mueve de acuerdo con la función $f(t) = t^3 + 2t + 0.5$. ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 2$?
   a. 0
   b. 10
   c. 12
   d. 14

2. Un objeto se mueve de acuerdo con la función $f(t) = 2t^3 - t + 0.5$. ¿Cuál es la aceleración instantánea cuando $t = 0$?
   a. 0
   b. -1
   c. 1
   d. 0.5

3. Un objeto se mueve de acuerdo con la función $f(t) = 16t - 4t^2$. ¿Cuándo el objeto tiene velocidad instantánea igual a cero?
   a. 0
   b. 2
   c. -2
   d. 1

4. ¿Cuál es la derivada del polinomio $f(x) = 10x^8 + x^5 - 4x^3 + 1.5$?
   a. $80x^7 + 5x^4 - 12x^2 + 1$.
   b. $10x^7 + x^4 - 4x^2$
   c. 1.5
   d. $80x^7 + 5x^4 - 12x^2$

5. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = x\text{sen}(x)\cos(x)$?
   a. $-x\text{sen}(x)^2 + x\cos(x)^2 - \text{sen}(x)\cos(x)$
   b. $x + \text{sen}(x)\cos(x)$
   c. $-x\text{sen}(x)^2 + x\cos(x)^2 + \text{sen}(x)\cos(x)$
   d. $\text{sen}(x)\cos(x)$

6. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = 2^{x^2}$?
   a. $2^{(x^2+1)}x \cdot \ln 2$
   b. $2^{(x^2+1)} \cdot \ln 2$
   c. $2^{(x^2)} \cdot \ln 2$
   d. 0

7. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = \tan x$?
   a. $\cot x$
   b. $\dfrac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$
   c. $\sec^2 x$
   d. $\dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$

8. ¿Cuál es la segunda derivada de la función $f(x) = \text{sen}\,(\cos x)$?
   a. $\cos(\cos x)(-\text{sen}\, x)$
   b. $(-\text{sen}(\cos x))(\text{sen}^2 x) - (\cos x)(\cos\,(\cos x))$
   c. $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$
   d. $(-\text{sen}^3 x)(\cos x) - \cos^3 x$

Resumen de límites y derivadas

Consideremos las funciones: $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x) \end{array}$ y $\begin{array}{c} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x) \end{array}$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=K$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$:

$$\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=K\pm L\,;\ \lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)=KL\,.$$

Considerando, además, $L\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{K}{L}$.

Si ocurre que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0$, decimos que *f* es continua en x_0.

Funciones continuas son: la función constante ($f(x) = c$); monomial ($f(x) = ax^n$) para cualquier real n, trigonométricas (sen x, cos x, tan x…); función exponencial (e^x); logaritmo natural (ln x), etcétera.

Si *f* es continua en L, $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)=f(L)$.

Esto justifica los límites: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=K^n$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{K}$, siempre que tengan sentido.

La derivada de una función en un punto x_0 se define como:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ o su equivalente: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Se puede denotar como $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ o $f'(x_0)$ cuando el límite existe.

La derivada satisface que: $\dfrac{d(f\pm g)(x_0)}{dx}=\dfrac{df(x_0)}{dx}\pm\dfrac{dg(x_0)}{dx}$, $\dfrac{d(fg)(x_0)}{dx}=f(x_0)\dfrac{dg(x_0)}{dx}+g(x_0)\dfrac{df(x_0)}{dx}$,

si $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{d(\frac{f}{g})(x_0)}{dx}=\dfrac{g(x_0)\dfrac{df(x_0)}{dx}-f(x_0)\dfrac{dg(x_0)}{dx}}{\left[g(x_o)\right]^2}$, $\dfrac{d(f\circ g)(x_0)}{dx}=\dfrac{df(g(x_0))}{dx}\cdot\dfrac{dg(x_0)}{dx}$.

Decimos que una función continua es derivable, si su derivada existe en cada punto de su dominio y llamamos a la función resultante, la derivada de *f*.

Funciones derivables son: la función constante ($f'(c) = 0$), monomial ($f'(ax^n)=nax^{n-1}$), para cualquier real $n \neq 0$ o $n \neq -1$, trigonométricas (consultar fórmulas en el libro), exponencial ($f'(e^x)$), logaritmo natural ($f'(\ln x) = \frac{1}{x}$), etcétera.