Lizzeth Trujillo Santamaría

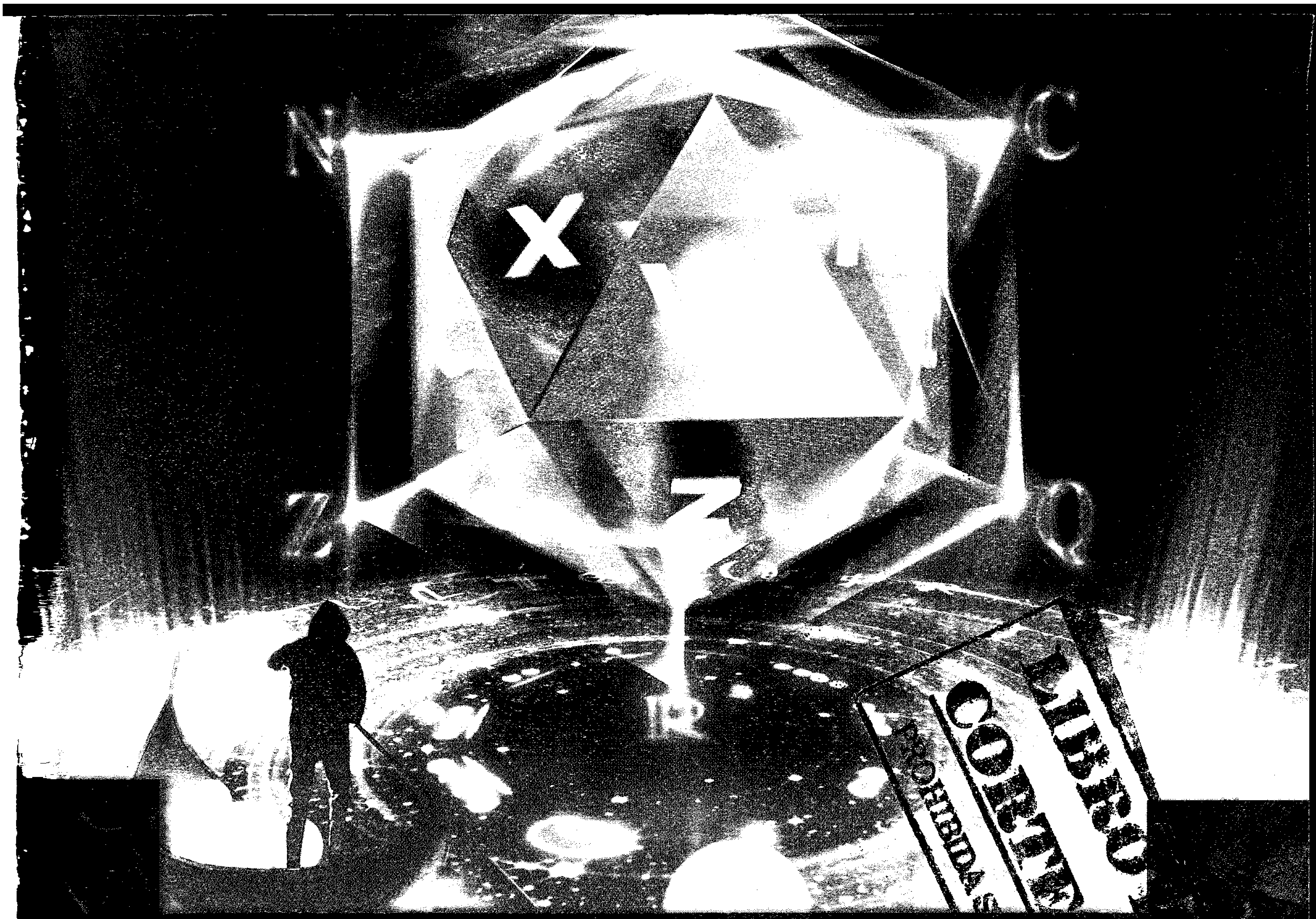
Álgebra

Bachillerato tecnológico

Book Mart MÉXICO MR

Lizzeth Trujillo Santamaría

Álgebra



Lizzeth Trujillo Santamaría

Álgebra

Book Mart
MÉXICO
MR

Coordinación editorial
Rolando Roberto Linaldi Guzmán

Editor en jefe
Angel Fernando Flores Reyes

Revisión técnica
Karina Isidro Mora

Corrección de estilo
Lidya Arana Lagos

Diseñador en jefe
Luis Miguel González Cabrera

Arte de portada
Osciel Máximo Fierro

Diagramación
César García Rueda

Iconografía
José Miguel Ruiz Ventura
César García Rueda

Fotografía
Shutterstock

Producción
Francisco Javier Martínez García

Autor
Lizzeth Trujillo Santamaría

Álgebra

1.ª edición, 2018
1.ª reimpresión, 2019

www.bookmart.com.mx

ISBN: 978-607-743-872-4

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana

Registro número 3740

Impreso en México / *Printed in Mexico*

++C251

Presentación

Estimado alumno:

Editorial Book Mart presenta esta obra, generada a partir del Nuevo Modelo Educativo. Hemos puesto toda nuestra experiencia y empeño para producir material que realmente facilite y proyecte tu aprendizaje.

Nos damos cuenta de que tú y tu presente exigen una mejor educación, más plural, democrática e incluyente. Sabemos que nuestro país es diverso y contiene una multiplicidad de identidades, perspectivas y culturas, a las cuales perteneces. Reconocemos tu derecho acceder a una educación que te permita desarrollarte plena y armónicamente como ser humano. Con todo ello en mente, y atendiendo los nuevos programas de estudio, nuestros equipos de expertos han elaborado cuidadosamente este libro de texto para ti.

Esta obra te guiará de forma amena y creativa a través de los conocimientos de esta asignatura, reconociendo tu creatividad y fomentando tu desarrollo. Las actividades están pensadas para que interacciones con tu entorno, a la vez que aprendes y practicas las habilidades y actitudes que solicita el perfil de egreso del bachillerato.

Este material didáctico fomenta un aprendizaje integral. Por ello, además de cubrir los conocimientos teóricos, logrará desarrollar tus habilidades socioemocionales, dialogar con las otras asignaturas de tu semestre, y fomentar tu sentido de pertenencia y amor por México; también te ofrecerá recursos tecnológicos de vanguardia, y fomentará tu apertura intelectual, tu sentido de responsabilidad, tu conocimiento de ti mismo y tus habilidades de trabajo en equipo y colaboración.

Además, encontrarás herramientas que te permitirán involucrarte más en tu propia evaluación de conocimientos, habilidades y actitudes, con el objetivo de ir más allá de las tradicionales evaluaciones sumativas o numéricas, y transitar hacia evaluaciones verdaderamente formativas.

Te invitamos a sumarte a nuestro esfuerzo para lograr que tus aprendizajes sean significativos y contribuyan a tu pleno desarrollo personal y social. Nuestro país tiene un importante reto educativo por delante, un reto que en este momento se concentra en ti. Por ello, nos complace enormemente acompañarte en este importante trayecto de tu educación media superior.

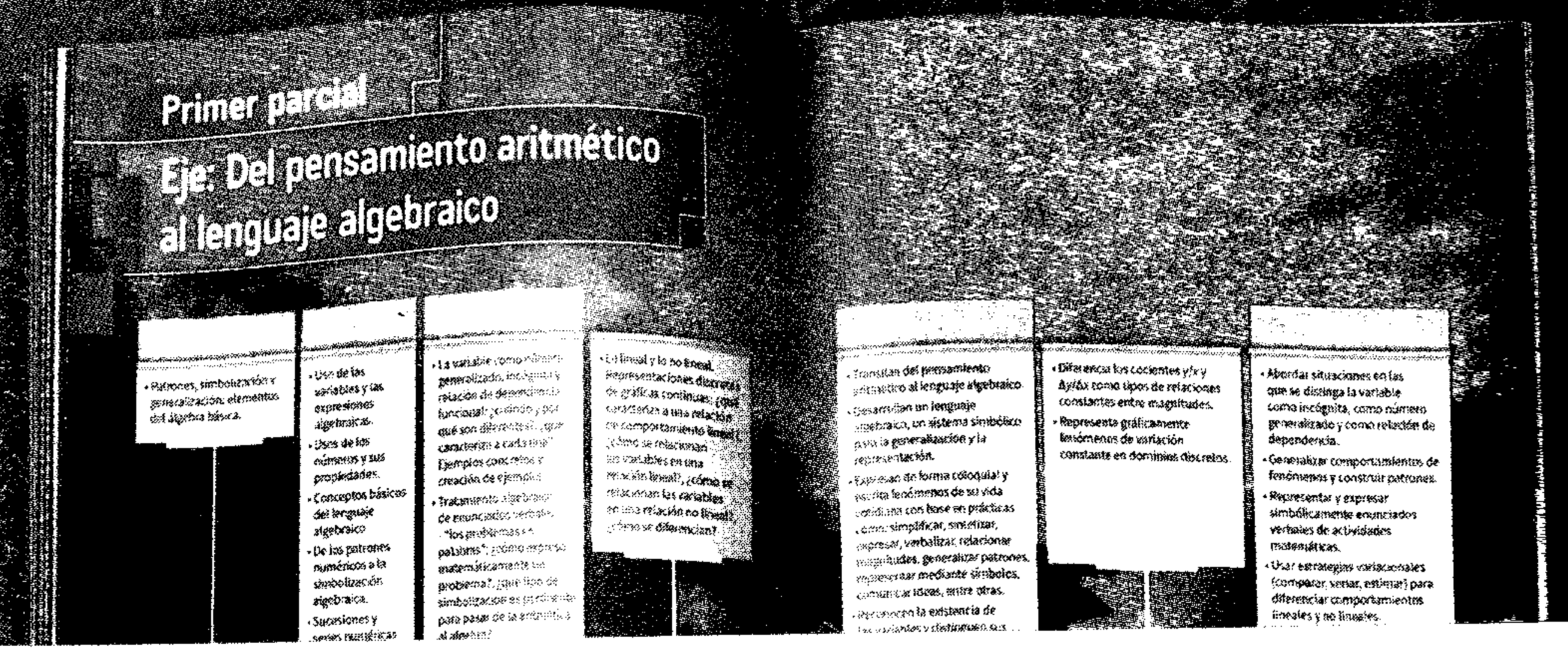
Cordialmente,
Book Mart

Conoce tu libro

Entrada de unidad

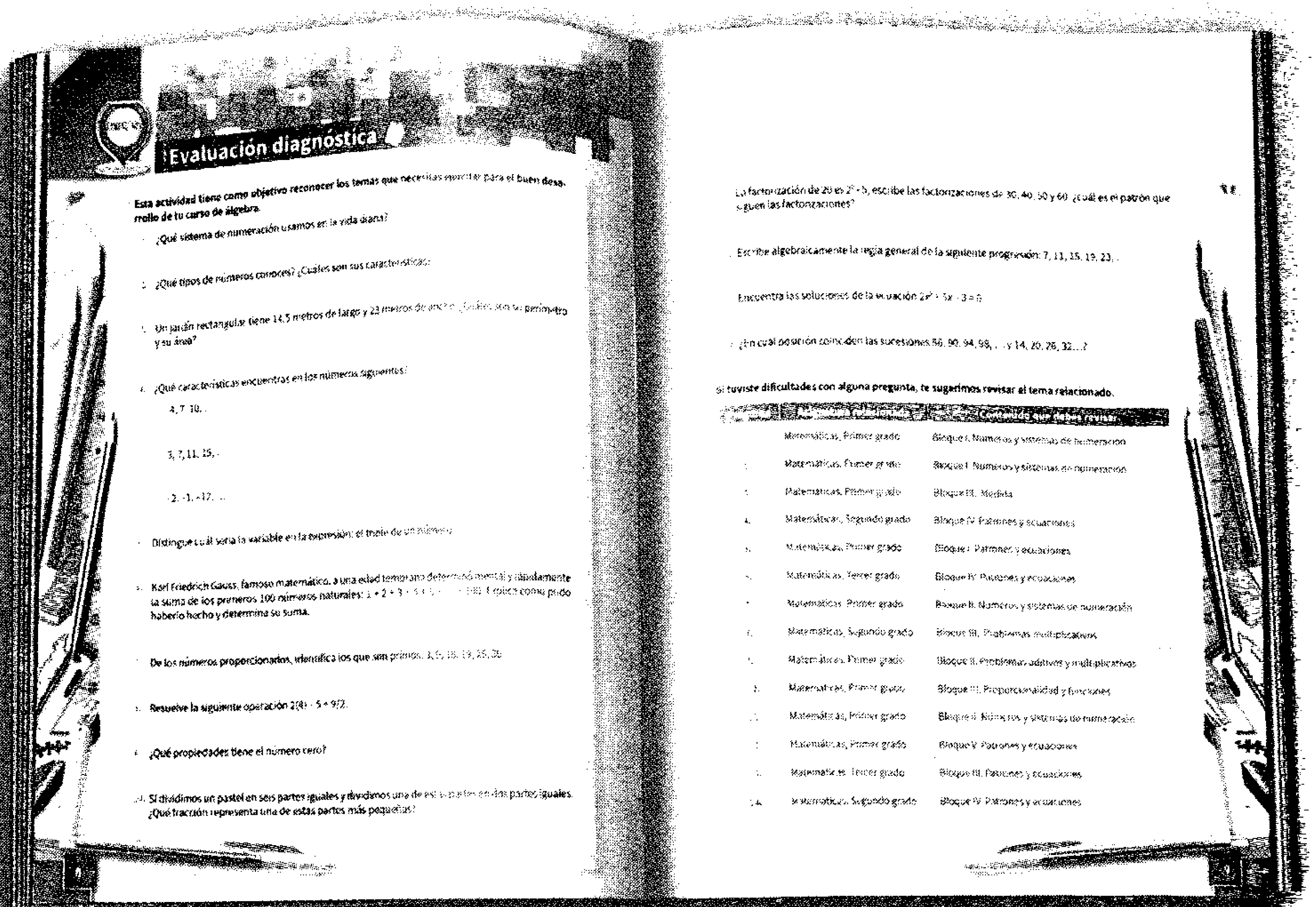
Al inicio encontrarás un panorama general de lo que aprenderás.

- Eje
- Componentes
- Contenidos centrales
- Contenidos específicos
- Aprendizajes esperados
- Productos esperados



Evaluación diagnóstica

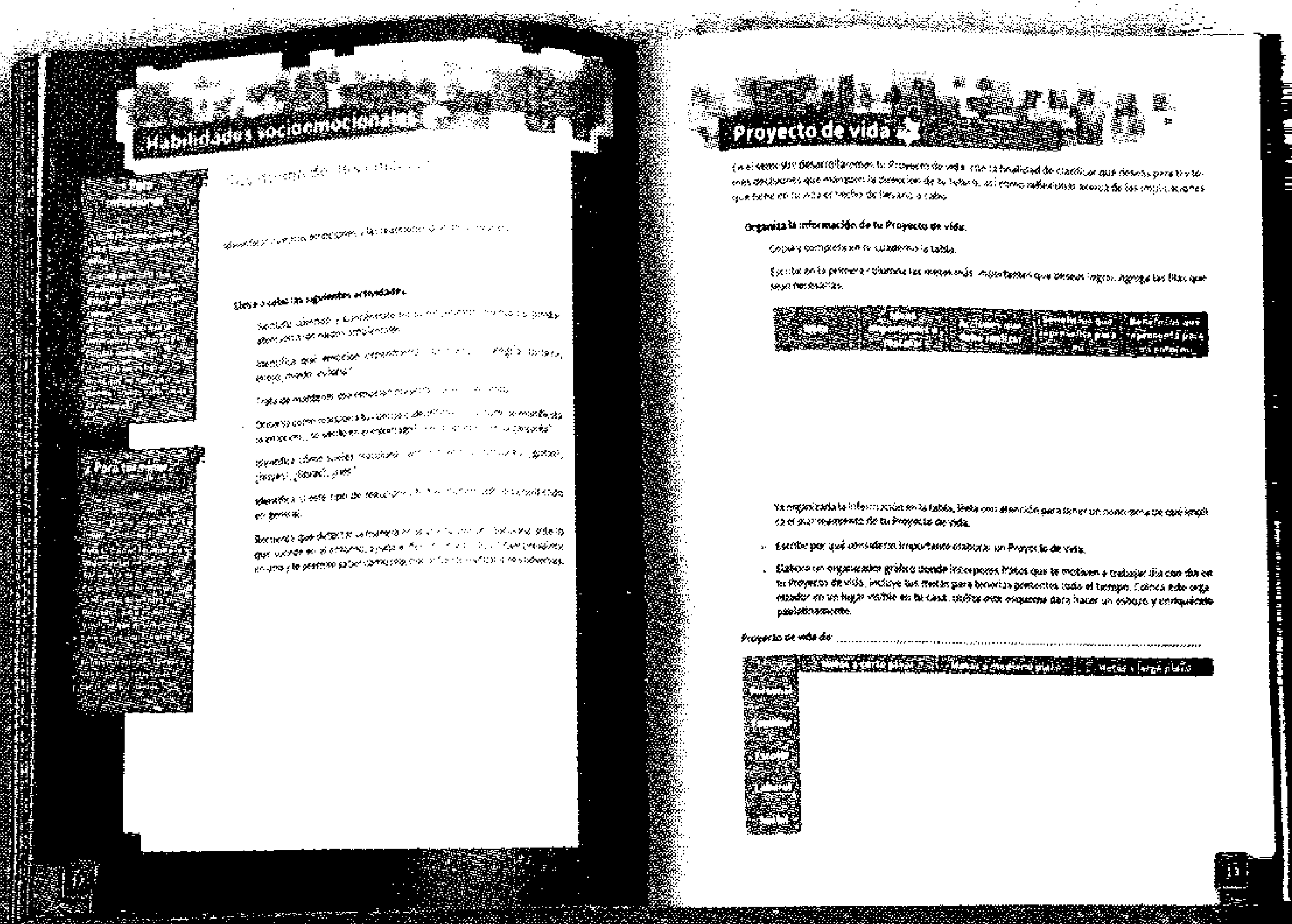
Se ubica al inicio y sirve para identificar tu nivel de conocimientos actuales. No cuenta para tu calificación.

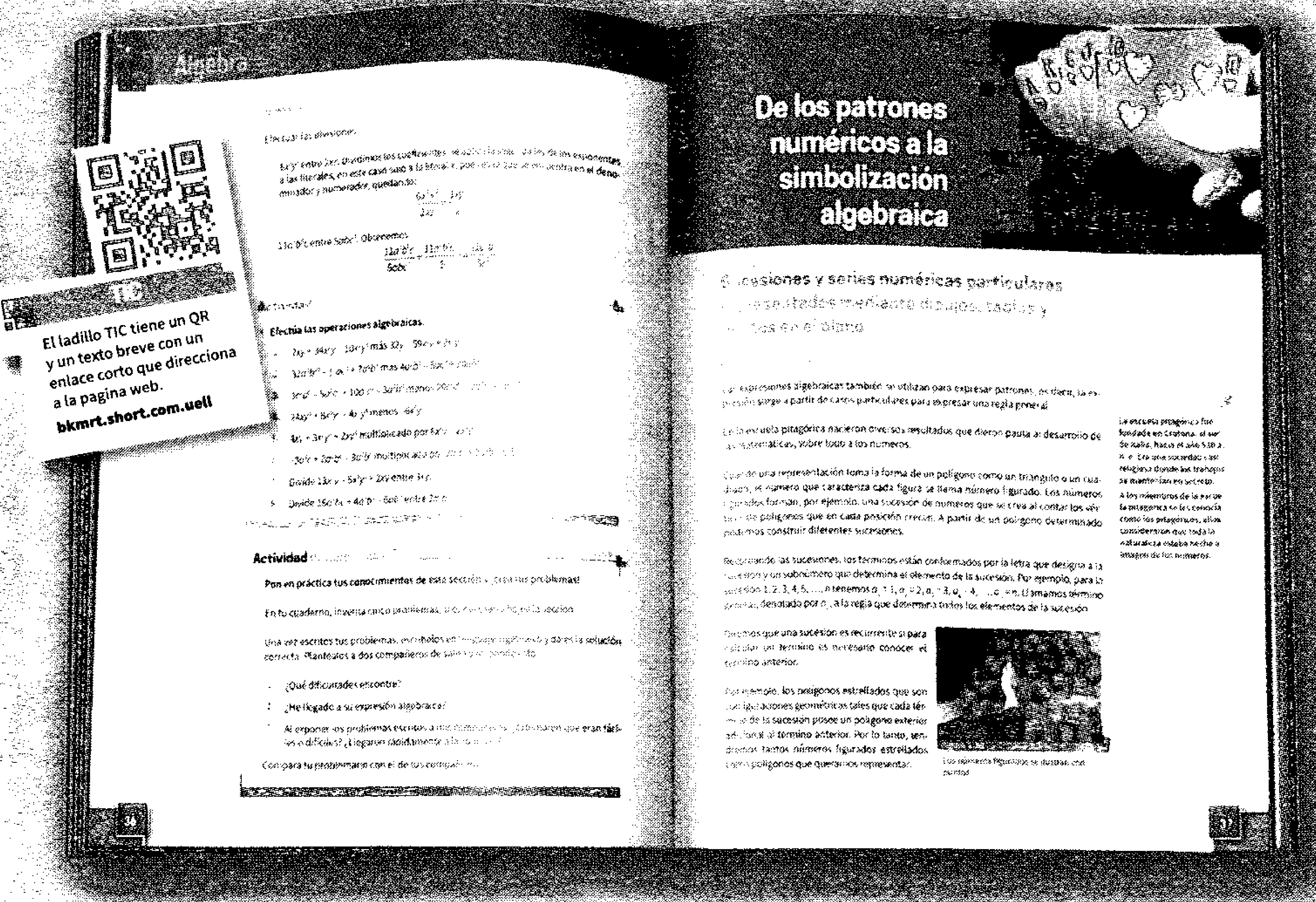


Esta sección, basada en el programa Construye T, está diseñada para desarrollar habilidades socioemocionales, y con ello mejorar el ambiente escolar en los planteles del nivel medio superior. Con estas actividades aprenderás a cultivar relaciones interpersonales sanas, podrás manejar tus emociones y saber cuándo debes solicitar apoyo para enfrentar de manera positiva y asertiva las vicisitudes de la vida en general.

Proyecto de vida

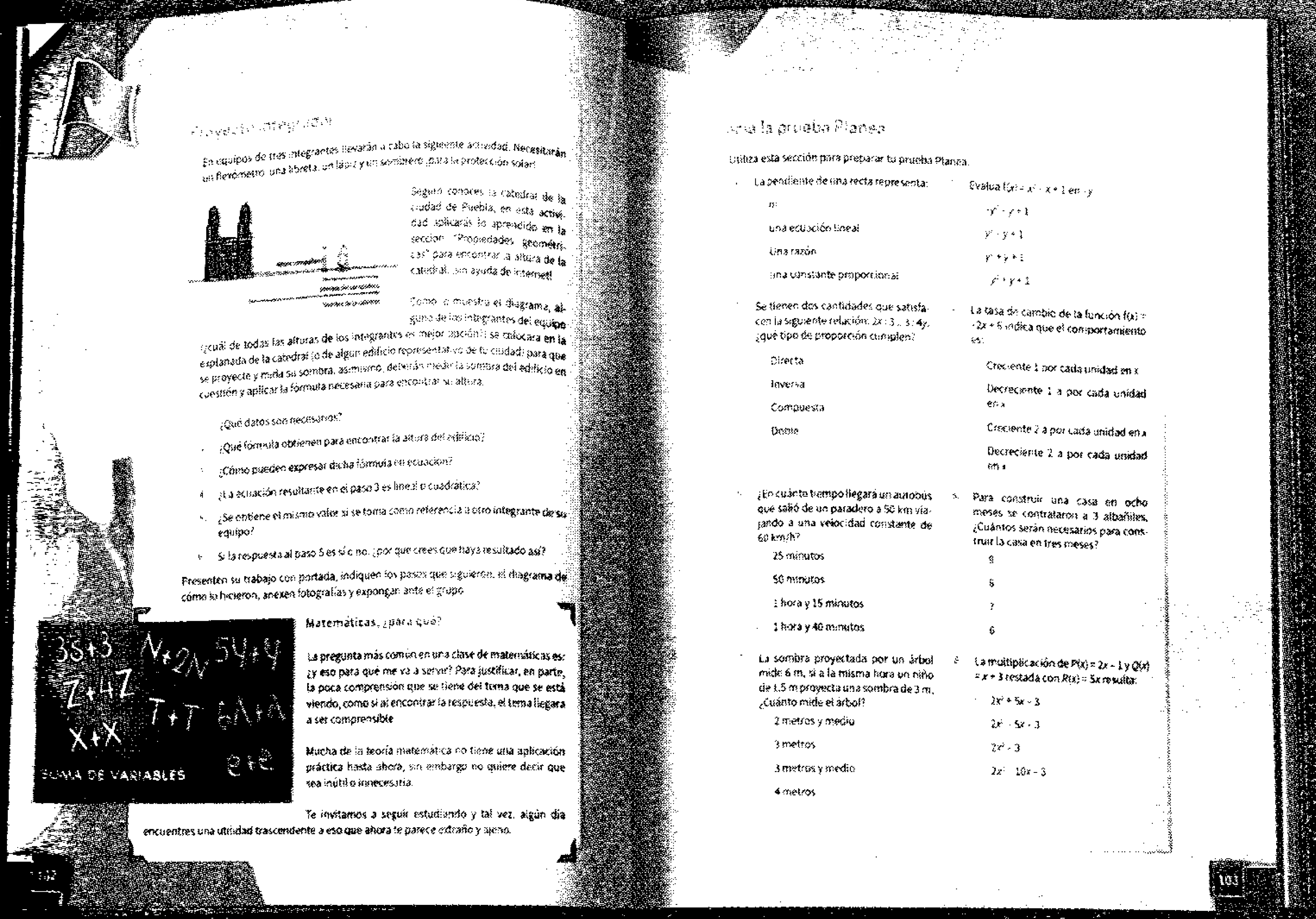
Esta sección presenta situaciones y actividades que te ayudarán a tomar decisiones para vislumbrar oportunidades, aprender a lidiar con riesgos y ubicar las condiciones que pueden generarte bienestar en el presente. Todo ello con la finalidad de que forjes un plan a corto, mediano y largo plazos en el que logres potencializar y aprovechar tus capacidades para lograr una vida plena y satisfactoria en todos los ámbitos.





Actividades de aprendizaje

Estas actividades te permitirán lograr los aprendizajes esperados. Presta especial atención a las actividades destacadas en color morado, que vienen marcadas con una etiqueta de **Producto esperado:**, pues son las necesarias para cubrir lo requerido por el programa de estudios de esta asignatura.



Te preparará para la prueba con el mismo nombre a través de preguntas relacionadas con el contenido del libro.

Actividad al final de cada unidad. En ella tendrás la oportunidad de practicar todo lo que has aprendido. Incluye una rúbrica de evaluación.

- Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.
- Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación.
- Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar, verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras.
- Reconocen la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.
- Interpreta y expresa algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.
- Evalúan expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.
- Reconocen patrones de comportamiento entre magnitudes.
- Formula de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráficamente patrones de comportamiento.
- Expresa mediante símbolos fenómenos de su vida cotidiana.
- Reconoce fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.

- Diferencia los cocientes y/x y $\Delta y/\Delta x$ como tipos de relaciones constantes entre magnitudes.
- Representa gráficamente fenómenos de variación constante en dominios discretos.

- Abordar situaciones en las que se distinga la variable como incógnita, como número generalizado y como relación de dependencia.
- Generalizar comportamientos de fenómenos y construir patrones.
- Representar y expresar simbólicamente enunciados verbales de actividades matemáticas.
- Usar estrategias variacionales (comparar, seriar, estimar) para diferenciar comportamientos lineales y no lineales.
- Caracterizar los fenómenos de variación constante.
- Representar gráficamente fenómenos de variación constante.

Para reflexionar...

¿Cómo te sientes cuando vas a tener un examen muy difícil?

Cuando enfrentas una situación difícil, ¿sientes dolor en alguna parte del cuerpo?

¿A veces sientes que las emociones te rebasan y no puedes manejarlas?

¿Cuántas veces has dicho cosas que no querías o sientes cuando estás enojada o enojado?

Para terminar...

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

Esta actividad reconoce la importancia de reflexionar acerca de sí mismo. Pasamos mucho tiempo realizando diferentes actividades, pero es mínimo o nulo el que destinamos para el autoconocimiento; cuando mejoramos el autoconocimiento también fomentamos relaciones sanas con los demás.

Soy dueño de mis emociones

Identificar nuestras emociones y las reacciones que nos provocan.

Lleva a cabo las siguientes actividades.

1. Siéntate cómodo y concéntrate en tu respiración. Intenta no prestar atención a los ruidos ambientales.
2. Identifica qué emoción experimentas justo ahora: ¿alegría, tristeza, enojo, miedo, euforia?
3. Trata de mantener esa emoción presente por un momento.
4. Observa cómo reacciona tu cuerpo e identifica en qué parte se manifiesta la emoción, ¿se siente en el estómago?, ¿en la cabeza?, ¿en la garganta?
5. Identifica cómo sueles reaccionar ante situaciones similares: ¿gritas?, ¿huyes?, ¿lloras?, ¿ríes?
6. Identifica si este tipo de reacciones te han beneficiado o perjudicado en general.
7. Recuerda que detectar la manera en la que tu cuerpo reacciona ante lo que sucede en el entorno, ayuda a identificar la emoción que prevalece en uno y te permite saber cómo reaccionar frente a situaciones adversas.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y tomes decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

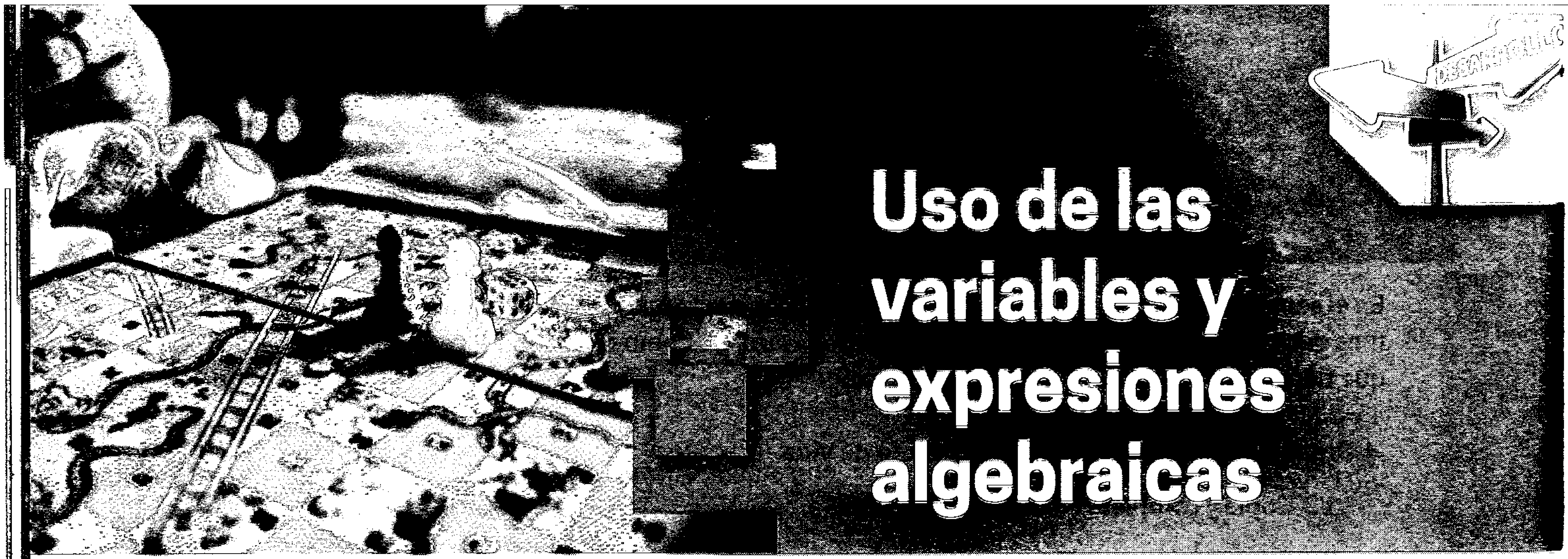
1. Copia y completa en tu cuaderno la tabla.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo realizar	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Ya organizada la información en la tabla, léela con atención para tener un panorama de qué implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico donde incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para tenerlas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza este esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ____

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Uso de las variables y expresiones algebraicas

La variable como número generalizado, incógnita y relación de dependencia funcional

A lo largo de la historia, ha sido necesario establecer idiomas generales para intercambiar información, conocimientos o estrategias que estimulen el desarrollo de una sociedad, por ejemplo, en el comercio.

¡Las matemáticas son un lenguaje extraordinario! Con ellas expresamos información para un estudio más profundo y general. Pero, ¿cómo es posible que las matemáticas expresen información general? ¿Es realmente posible decir que “tal cosa” puede expresarse con un símbolo? ¡Y que dicho símbolo representa una cantidad cualquiera! ¿En serio?

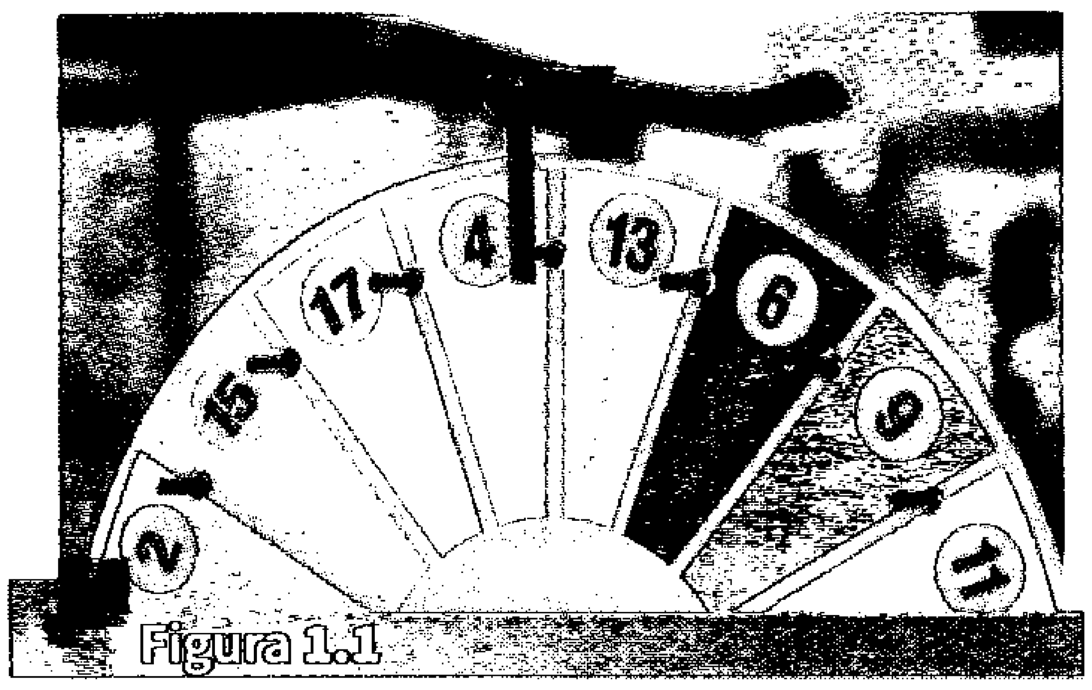


Figura 1.1

La variable expresa fenómenos cambiantes.

Como bien sabes, una variable en matemáticas expresa un valor que puede variar (de ahí su nombre), las letras del abecedario son utilizadas para representar una variable, comúnmente las letras *x* o *y* son usadas como variables. Es seguro que en tus clases de matemáticas te hayan presentado una variable “incógnita”, por ejemplo, cuando viste los sistemas de ecuaciones de *n* incógnitas o en algún problema en el que desconocías cierto valor. Y, ¿qué dices de las variables en las funciones? Es decir, de las variables relacionadas en función de otra variable.

Para conocer su origen, es necesario trasladarnos a la historia del álgebra. Pero, ¿qué es el álgebra? Es la rama de las matemáticas encargada de estudiar las propiedades generales de las operaciones aritméticas y los números, generando procedimientos generalizados.

Los babilonios, por el año 1700 a. n. e., idearon un sistema de numeración posicional y sexagesimal y tenían métodos para contar en su intercambio comercial. En India, el matemático Aryabhata estudió problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas; el matemático Abu Ja´far Muhammad ibn Al-Khwarizmi fue el primero que incluyó en su obra problemas de la vida cotidiana, en ella expone los números naturales. A Abu se le conoce como el padre del álgebra.

Los matemáticos griegos Arquímedes, Herón y Diofanto usaron el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas, aunque no la formalizaron. Diofanto es el más destacado por su obra *Arithmetica,* donde recopila conocimiento usado en el álgebra hasta su época. En el siglo XVII, los matemáticos René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función matemática como la relación de dependencia entre dos variables.

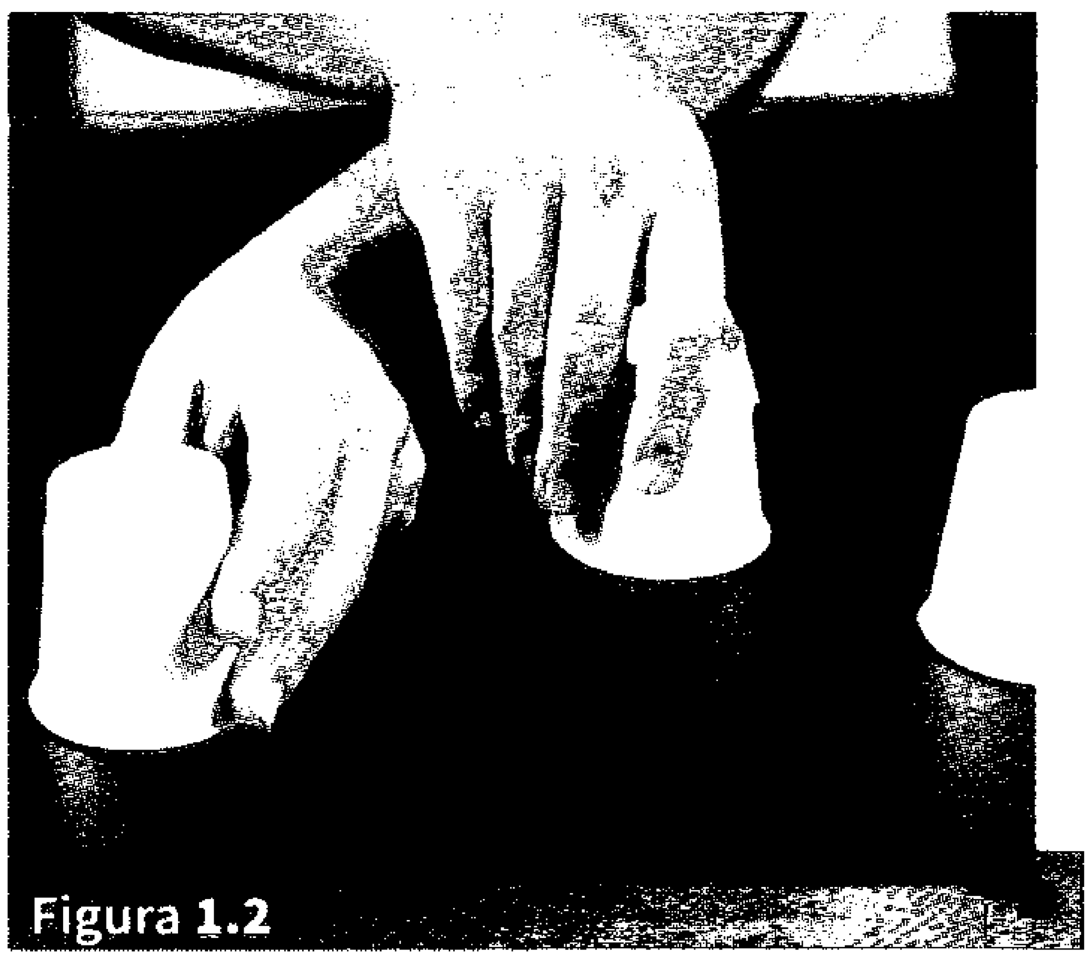


Figura 1.2
La variable puede representar valores desconocidos.

En el álgebra, la variable se utiliza para expresar información matemática o alguna relación matemática mediante letras, es decir, se utiliza el lenguaje algebraico. La variable puede representar una incógnita, un número cualquiera o una dependencia funcional.

Es claro que la variable como incógnita expresa un número que desconocemos, por ejemplo, ¿qué número multiplicado por sí mismo más 3 da 28? O problemas cuya existencia se remonta años atrás; en el epitafio de Diofanto, siglo III d. n. e. hay uno:

> "Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además, una duodécima parte de su vida cuando de vello se cubrió su barbilla.
>
> La séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre.
>
> Y con profunda pena, descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo."

¿A qué edad murió Diofanto? ¿A qué edad se casó? ¿A qué edad tuvo su hijo?

Un problema le fue planteado a Einstein por un alumno: ¿Qué edades tienen las tres hijas del profesor?

> "Dos profesores pasean, charlando de sus respectivas familias —Por cierto —pregunta uno— ¿de qué edades son tus tres hijas? —El producto de sus edades es 36 —contesta su colega—, y su suma, casualmente es igual al número de tu casa. Tras pensar un poco, el que ha formulado la pregunta acota: —Me falta un dato. —Es verdad —concede el otro—. Me había olvidado aclararte que la mayor toca el piano."

El problema siguiente contiene a la variable como número generalizado ya que esta puede ser vista como una representación simple, por ejemplo: El triple de un número, $3x$.

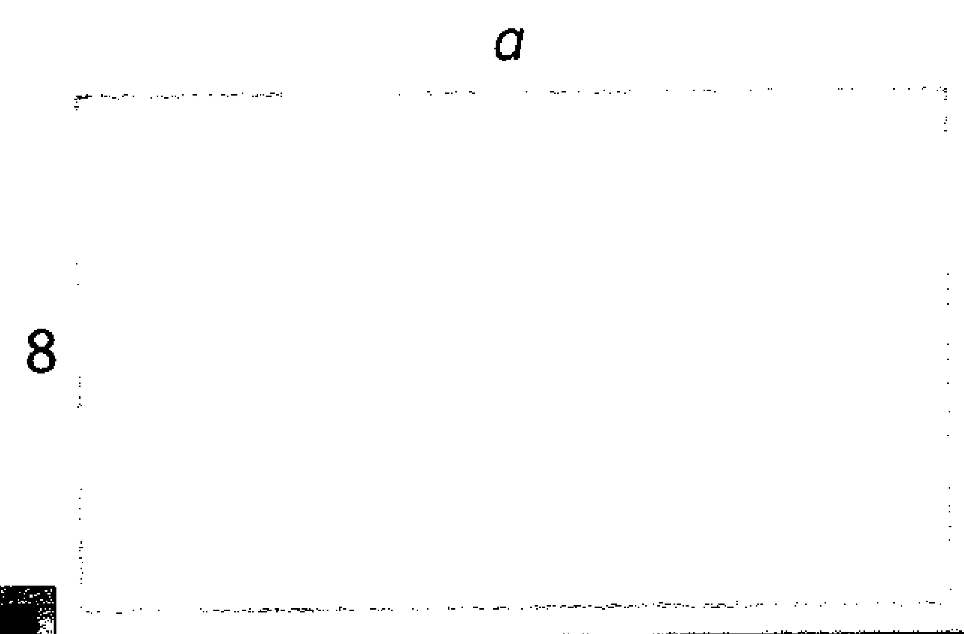


Figura 1.3

¿Cuál sería el perímetro del rectángulo de la Figura 1.3?
Perímetro del rectángulo $= 8 + 8 + a + a = 2 \cdot 8 + 2a = 16 + 2a$.

La variable también es vista como dependencia funcional de otra, veamos este problema: Por cada año humano, el mejor compañero del hombre, el perro, tiene 7 años. Esto quiere decir que nuestros perros tienen menos vida que un humano. Imagina que te regalan un cachorro a los 12 años; uno puede pensar en sus planes dentro de 10, 15, 20 años, pero nuestro perro, ¿qué edad tendrá?

"Cada pareja de conejos, al mes, tiene una nueva pareja de gazapos, la cual no tendrá descendencia hasta que sea adulta, lo que ocurre a los dos meses de nacer."

Comenzando con una pareja de crías de conejos, ¿cuántas parejas de conejos se obtendrán en dos años? ¿En tres? ¿En 10? ¿En x años?

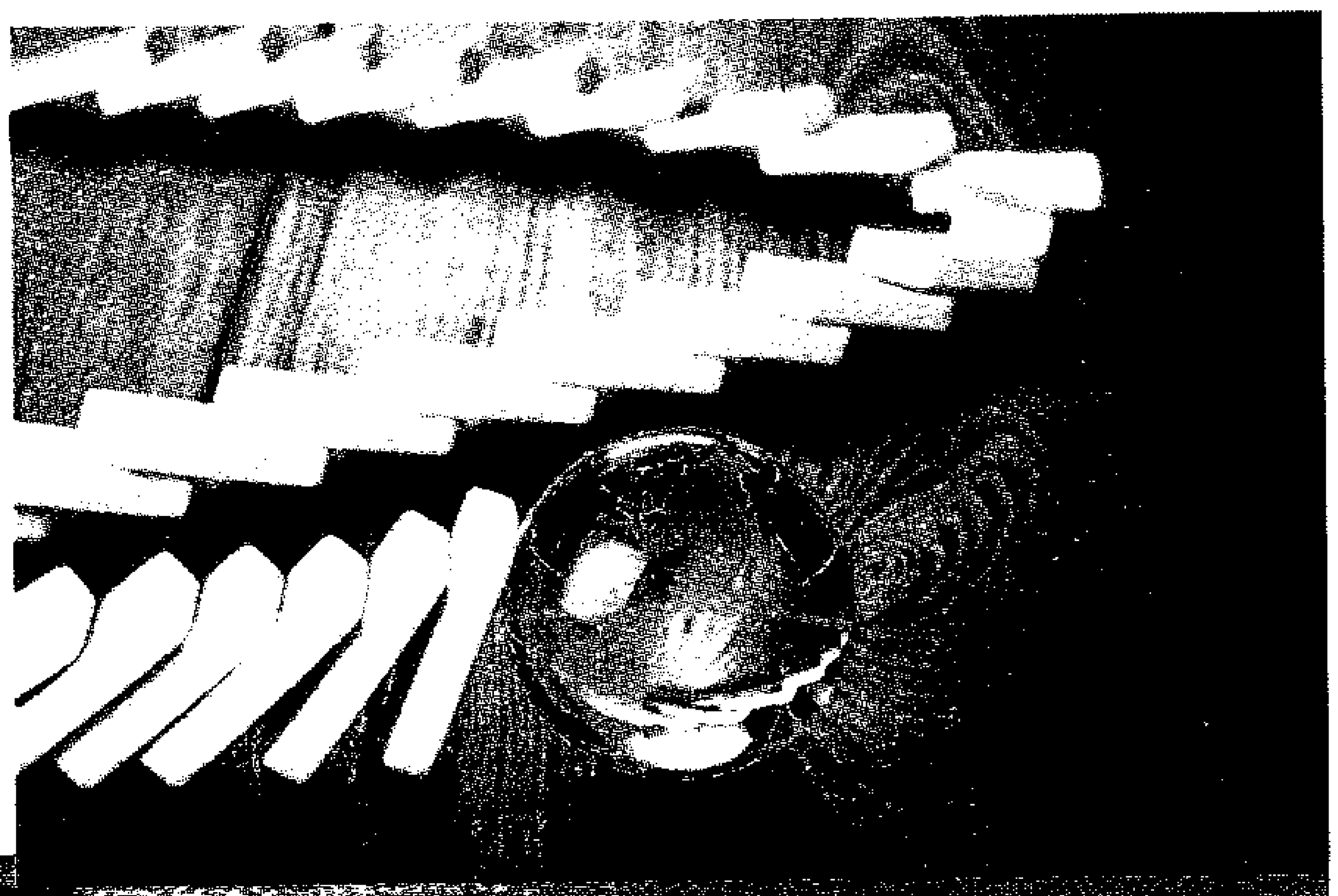


Figura 1.4

En una relación funcional hay valores que dependen de otros.

Como ves, existen diversos problemas planteados desde siglos atrás, el álgebra representa una infinidad de información; también puedes crear un problema cuya solución sea tan compleja como lo desees, ¿lo intentamos? Imagina una situación, tal vez ir a la tienda, algún juego de números, etcétera. Por ejemplo, yo quiero un juego de números, las características serían que el doble de uno de ellos más el otro da 80, y que la suma de ambos sea 40. La pregunta es: ¿qué números son? Todo está descrito en la tabla. Completa la tabla con la situación, las características y la pregunta que consideres pertinente.

Situación	Características	Pregunta
Juego de números	Quiero que el doble de uno de ellos más el otro dé 80 y que la suma de ambos sea 40.	¿Qué números son?

Actividad de aprendizaje 1

Productos esperados

Llena la tabla con los datos requeridos y guárdala como evidencia de aprendizaje.

Te presentamos diversos problemas, en cada uno identifica la variable en la oración, luego, ¿es incógnita?, ¿número generalizado? o ¿dependencia funcional?

Problema	Variable	Tipo de variable
La mitad de un número.		
El triple de un número más 5 da 20.		
Una vez unos ladrones robaron varios rollos de tela. Alguien que pasaba por el bosque oyó hablar: —Si nos quedamos con seis cada uno, sobran cinco rollos; pero si nos quedamos con siete cada uno, faltarán ocho. La pregunta es: ¿cuántos rollos de tela y ladrones hay?		
Con cuatro cuatros y empleando las operaciones aritméticas puedes escribir muchos números. Por ejemplo: 0 = 44 − 44, 1 = 44/44, … ¿Hasta qué número puedes llegar?		
Un pavo real estaba posado sobre un poste de nueve codos de altura. En la base del poste había un agujero de culebra. El pavo se lanza por la culebra, que está a una distancia del poste igual a tres veces su altura. Cuando la atrapa, los dos han recorrido la misma distancia. ¿A qué distancia del poste cazó el pavo a la culebra?		

Definición de expresión algebraica

Una expresión algebraica es una combinación de números y letras relacionados mediante las operaciones usuales: adición, sustracción, multiplicación, división y potencia.

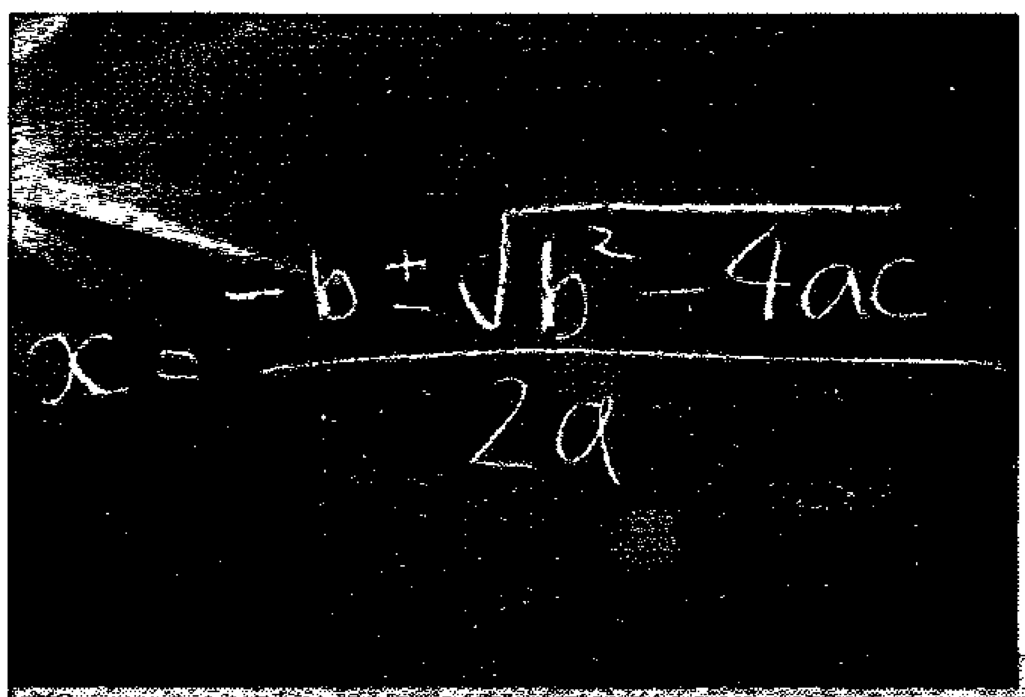


Figura 1.5
La fórmula general es una expresión algebraica.

Observa la expresión $4x + 3xy - 10$. Esta expresión está conformada por tres términos: $(4x)$, $(3xy)$ y (-10). Por tanto, un término es una expresión algebraica de un solo símbolo o de varios símbolos que se encuentran separados por la multiplicación o la división, por ejemplo $2x$, $5z^2$ o $-3n^2m$.

El grado absoluto de un término algebraico es la suma de los exponentes de sus factores literales: $\frac{2}{3}x^3$ tiene grado 3, $4x^2y^3$ tiene grado 5 porque la suma de ambos exponentes $2 + 3 = 5$. El grado relativo es el exponente de la variable a considerar, del ejemplo anterior, $4x^2y^3$ es de grado 3 respecto a la variable y.

Existe una infinidad de expresiones algebraicas, la más sencilla se denonima monomio. Un monomio es una expresión algebraica formada solo por el producto de un número, al que llamaremos coeficiente, estos son ejemplos de monomio: $2x^3$, $5xy^6$, $\frac{1}{3}x$, $\sqrt{3}z^{10}$.

Un polinomio es una expresión algebraica que consta de dos o más términos algebraicos, como: $2x^3 + 5xy^6$, $2x+\sqrt{2}z$, $-2xy + 3x$. Dependiendo de la cantidad de sumandos, el polinomio recibe el nombre de binomio (cuando tiene dos sumandos) y trinomio (cuando tiene tres sumandos).

Monomio	Binomio	Trinomio	Polinomio
$-x^2$	$-x^2 + 2y$	$-x^2 + 2y - 2x^2y^3$	$-x^2 + 2y - 2x^2y^3 + 3x^3y^2$

El grado absoluto de un polinomio está determinado por el término de mayor grado absoluto. Observa el siguiente ejemplo: $3x^3 - 5x^2y + 10xy^{11}$ tiene grado 12, porque $10xy^{11}$ es de grado absoluto 12.

El grado de un polinomio respecto de una variable es el mayor exponente con que figura dicha variable, así, el polinomio $2z^4 + 3y^3x - 8xy$ es de grado 4 respecto de z, de grado 1 respecto de x y de grado 3 respecto de y.

Actividad de aprendizaje 7

En la tabla, identifica si las expresiones algebraicas son monomios, binomios, trinomios o polinomios, halla sus coeficientes, parte literal y grado absoluto.

Expresión algebraica	Tipo	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$3x^2 - 3y^2x + xy$				
$-xy$				
$x+\sqrt{3}y^5$				
$-2x+\frac{3}{4}y^5+10z$				
$6xz^4 + 3x + 2x^3z^2 - 5xz$				

En equipos, realicen la actividad.

Organicen grupos de cinco integrantes y elaboren una tabla con los conceptos más importantes de la sección. Apóyense en consultas en internet, libros, etcétera. Asegúrense de que la información sea verídica, pregunten a su profesor. Usen esta lista.

1. El lenguaje algebraico es importante porque…
2. La variable puede verse como…
3. Una expresión algebraica es…
4. Las expresiones algebraicas se clasifican en…

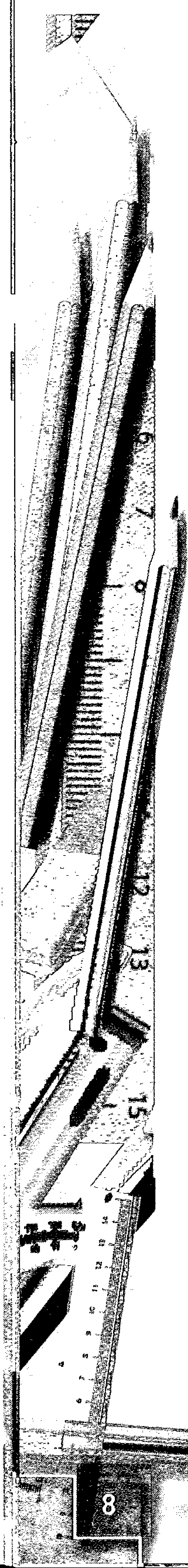
Contenido

Primer parcial

Segundo parcial

INICIO

Evaluación diagnóstica



Esta actividad tiene como objetivo reconocer los temas que necesitas ejercitar para el buen desarrollo de tu curso de álgebra.

1. ¿Qué sistema de numeración usamos en la vida diaria?

2. ¿Qué tipos de números conoces? ¿Cuáles son sus características?

3. Un jardín rectangular tiene 14.5 metros de largo y 23 metros de ancho. ¿Cuáles son su perímetro y su área?

4. ¿Qué características encuentras en los números siguientes?
   a. 4, 7, 10, …
   b. 3, 7, 11, 15, …
   c. −2, −1, −12, …

5. Distingue cuál sería la variable en la expresión: el triple de un número.

6. Karl Friedrich Gauss, famoso matemático, a una edad temprana determinó mental y rápidamente la suma de los primeros 100 números naturales: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 100. Explica cómo pudo haberlo hecho y determina su suma.

7. De los números proporcionados, identifica los que son primos: 3, 9, 18, 19, 25, 39.

8. Resuelve la siguiente operación 2(4) − 5 + 9/2.

9. ¿Qué propiedades tiene el número cero?

10. Si dividimos un pastel en seis partes iguales y dividimos una de estas partes en dos partes iguales. ¿Qué fracción representa una de estas partes más pequeñas?

11. La factorización de 20 es $2^2 \cdot 5$, escribe las factorizaciones de 30, 40, 50 y 60. ¿cuál es el patrón que siguen las factorizaciones?

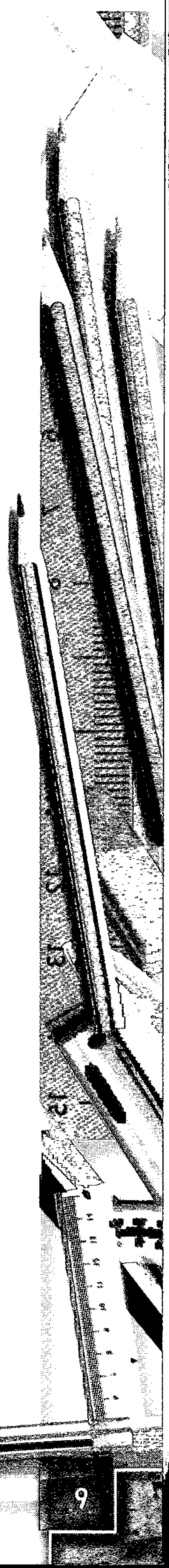
12. Escribe algebraicamente la regla general de la siguiente progresión: 7, 11, 15, 19, 23, …

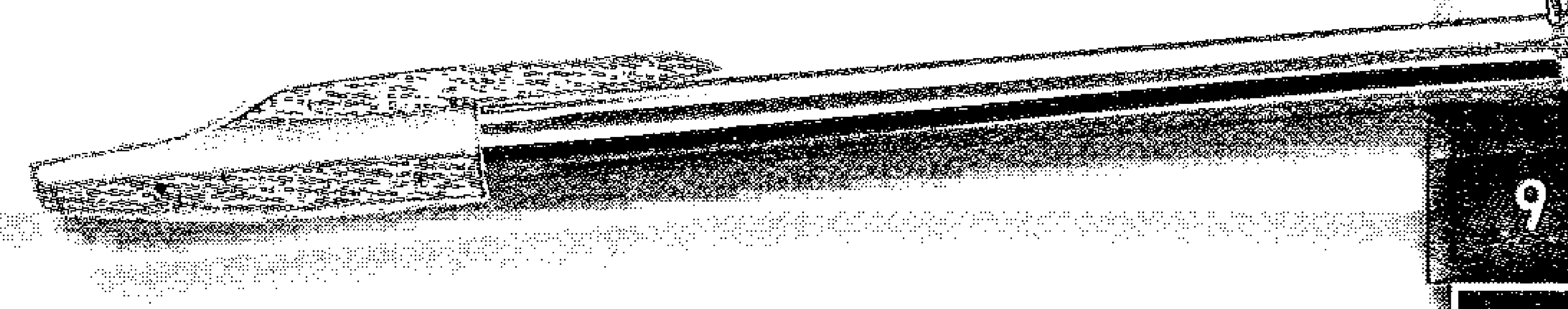
13. Encuentra las soluciones de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$

14. ¿En cuál posición coinciden las sucesiones 86, 90, 94, 98, … y 14, 20, 26, 32…?

◁ **Si tuviste dificultades con alguna pregunta, te sugerimos revisar el tema relacionado.**

Pregunta	Asignatura relacionada	Contenido que debes revisar
1.	Matemáticas, Primer grado	Bloque I. Números y sistemas de numeración
2.	Matemáticas, Primer grado	Bloque I. Números y sistemas de numeración
3.	Matemáticas, Primer grado	Bloque III. Medida
4.	Matemáticas, Segundo grado	Bloque IV. Patrones y ecuaciones
5.	Matemáticas, Primer grado	Bloque I. Patrones y ecuaciones
6.	Matemáticas, Tercer grado	Bloque IV. Patrones y ecuaciones
7.	Matemáticas, Primer grado	Bloque II. Números y sistemas de numeración
8.	Matemáticas, Segundo grado	Bloque III. Problemas multiplicativos
9.	Matemáticas, Primer grado	Bloque II. Problemas aditivos y multiplicativos
10.	Matemáticas, Primer grado	Bloque II!. Proporcionalidad y funciones
11.	Matemáticas, Primer grado	Bloque II. Números y sistemas de numeración
12.	Matemáticas, Primer grado	Bloque V. Patrones y ecuaciones
13.	Matemáticas, Tercer grado	Bloque III. Patrones y ecuaciones
14.	Matemáticas, Segundo grado	Bloque IV. Patrones y ecuaciones





Primer parcial

Eje: Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico

- Patrones, simbolización y generalización: elementos del álgebra básica.

- Uso de las variables y las expresiones algebraicas.
- Usos de los números y sus propiedades.
- Conceptos básicos del lenguaje algebraico.
- De los patrones numéricos a la simbolización algebraica.
- Sucesiones y series numéricas

- La variable como número generalizado, incógnita y relación de dependencia funcional: ¿cuándo y por qué son diferentes?, ¿qué caracteriza a cada una? Ejemplos concretos y creación de ejemplos.
- Tratamiento algebraico de enunciados verbales - "los problemas en palabras": ¿cómo expreso matemáticamente un problema?, ¿qué tipo de simbolización es pertinente para pasar de la aritmética al álgebra?
- Interpretación de las expresiones algebraicas y de su evaluación numérica. Operaciones algebraicas ¿Por qué la simbolización algebraica es útil en situaciones contextuales?
- Sucesiones y series numéricas particulares (números triangulares y números cuadrados, sucesiones aritméticas y geométricas), representadas mediante dibujos, tablas y puntos en el plano. Con base en comportamientos numéricos, ¿qué cambia, cómo y cuánto cambia? Un análisis variacional de los patrones numéricos.

- Lo lineal y lo no lineal. Representaciones discretas de gráficas continuas: ¿qué caracteriza a una relación de comportamiento lineal?, ¿cómo se relacionan las variables en una relación lineal?, ¿cómo se relacionan las variables en una relación no lineal?, ¿cómo se diferencian?

Además, usaremos las fórmulas:

$2a$: La segunda diferencia encontrada.

$3a + b$: La primera diferencia encontrada entre el primero y segundo término.

$a + b + c$: El primer elemento de nuestra sucesión.

Ejemplo

Dada la sucesión 8, 22, 42, 68, 100, ... iniciamos encontrando la diferencia entre cada pareja de términos consecutivos.

6, 15, 28, 45, 66, 91...

Comprobamos que su diferencia no es la misma, proseguimos a sacar su segunda diferencia, esta vez entre los números resultantes de la primera diferencia:

6, 15, 28, 45, 66, 91...

Ayudándonos de las otras fórmulas, tenemos:

6, 15, 28, 45, 66, 91...	$a + b + c = 6$
	$3a + b = 9$
	$2a = 4$

Iniciamos encontrando el valor de a:

$2a = 4$, de donde $a = \frac{4}{2} = 2$.

Sustituimos en $3a + b$ para encontrar el valor de b:

$3a + b = 3 \cdot 2 + b = 9$, de esto se sigue que $6 + b = 9$. Finalmente $b = 9 - 6 = 3$.

Para encontrar el valor de c, tomamos como referencia la primera fórmula, obteniendo así:

$a + b + c = 6 = 2 + 3 + c = 6$. Lo que deriva en $c = 1$.

Por último, se sustituye en la fórmula de la regla general $an^2 + bn + c$.

iendas que $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$, conseguimos:

$+ 3n + 1$ es la regla general! ¿Comprobamos?

$= 1$, por consiguiente $2(1)^2 + 3(1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$.

$= 2$, por consiguiente $2(2)^2 + 3(2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$.

$= 3$, por consiguiente $2(3)^2 + 3(3) + 1 = 18 + 9 + 1 = 28$.

$= 4$, por consiguiente $2(4)^2 + 3(4) + 1 = 32 + 12 + 1 = 45$.

la misma sucesión!

ctividad

Determina si las sucesiones son cuadráticas, de ser así, encuentra la regla general.

1. $-2, 1, 6, 13, 22, 33, \ldots$
2. $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$
3. $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
4. $6, 14, 24, 41, 50, \ldots$
5. $11, 16, 21, 26, 31, 36, \ldots$

Representaciones discretas de gráficas continuas

Recordemos. Una función es una regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, usualmente $y = f(x)$. El primer conjunto es el dominio de la función y sus elementos son los valores de x, la variable independiente. El segundo es el contradominio y sus elementos son los posibles valores de y, la variable dependiente.

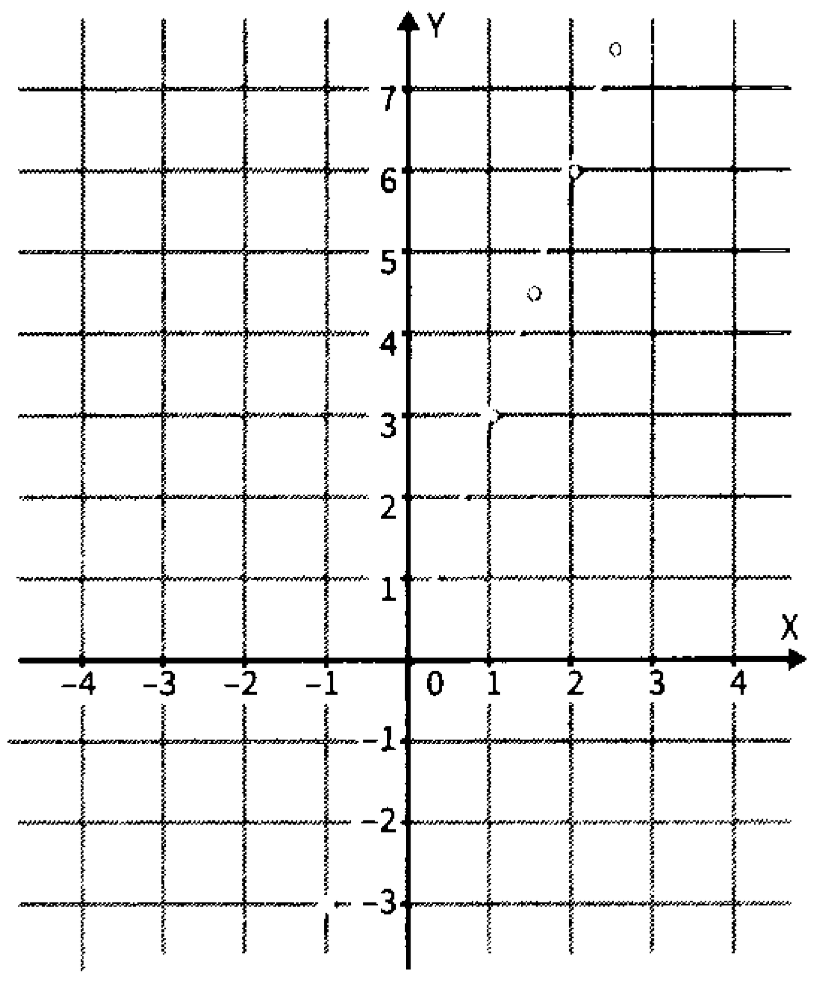
Para construir la gráfica de una función, hacemos una tabulación de valores: asignamos valores arbitrarios a la variable independiente x, evaluamos en la función, es decir, sustituimos cada valor de x para obtener un valor de y, para así formar los pares ordenados. Es el mismo proceso que usamos para graficar sucesiones. La gráfica nos ayuda a estudiar el comportamiento de la función.

Una función es lineal si la variable dependiente x tiene como máximo exponente 1. La forma general de una función lineal es $f(x) = ax + b$.

Ejemplo

La función $f(x) = 3x$ es lineal. Si $x = 1$, entonces $f(1) = 3(1) = 3$, si $x = 3$, $f(3) = 3(3) = 9$, si $x = -2$, ocurre que: $f(-2) = 3(-2) = -6$, etcétera.

Obtenemos la tabla y la gráfica con las evaluaciones hechas.

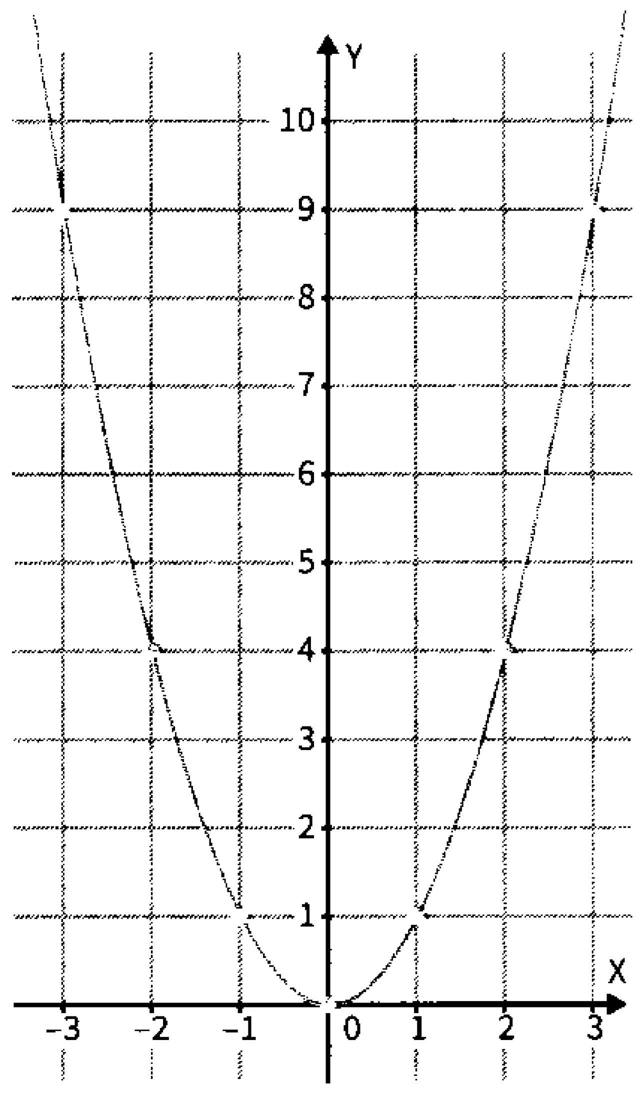


x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
−1	−3
−2	−6

Una función cuadrática tiene la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con a distinto de cero.

Las ecuaciones cuadráticas nos ayudan a trabajar con áreas y comúnmente se encuentran en problemas de movimiento.

La ecuación cuadrática más básica es $y = x^2$. Tomando valores para la variable x, encontraremos los valores de la variable y.



x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Como has observado, la gráfica de esta función es una curva. La función es no lineal.

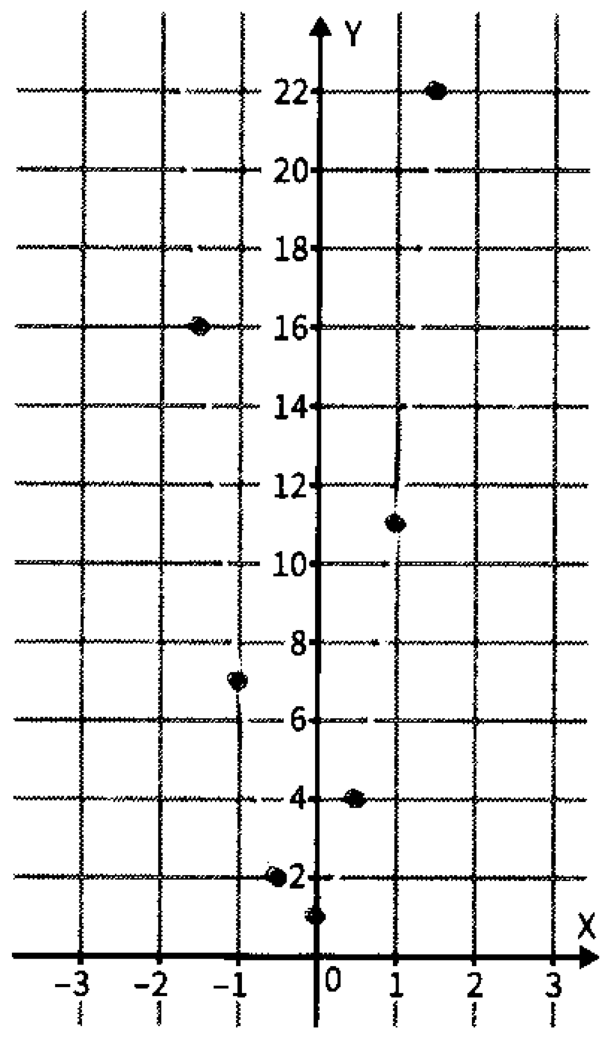
Recuerda que la variable y es la que se localiza en el eje de las ordenadas (vertical) y la variable x en el eje de las abscisas (horizontal) y estos mismos ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes que se enumeran comenzando donde ambos signos son positivos y en sentido contrario a las manecillas del reloj. Los valores positivos corresponden arriba y a la derecha, respectivamente, para x y y.

Ejemplo

Graficaremos la función $y = 2x^2 + x + 1$.

Eligiendo valores para x, obtenemos la tabla y la gráfica.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



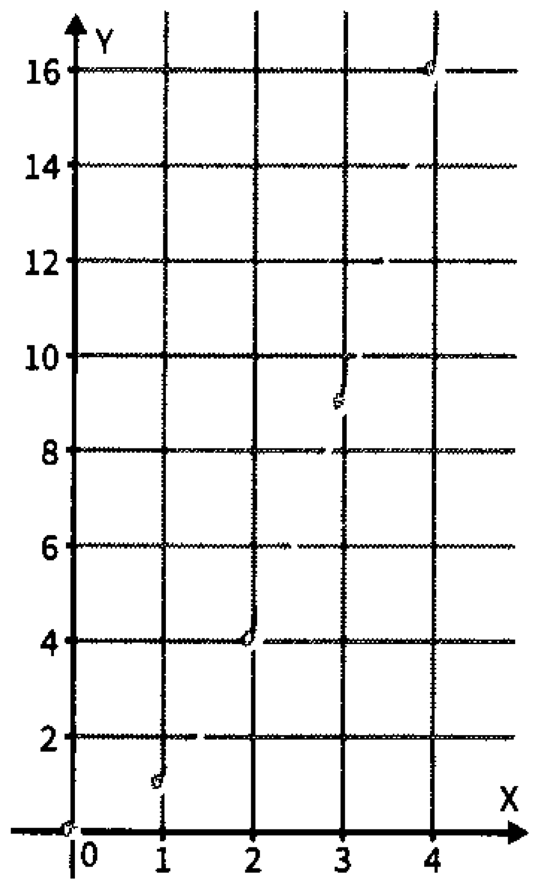
Dada una función, diremos que es creciente si tomando dos valores $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_2) > f(x_1)$, y diremos que es decreciente si tomamos los mismos valores y se tiene que $f(x_2) < f(x_1)$.

Ejemplos

1. La función $f(x) = x^2$ es una función creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

   Para $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$, tenemos que $f(x_1) = 9$ y $f(x_2) = 16$, así, $16 > 9$, igual para los demás puntos.

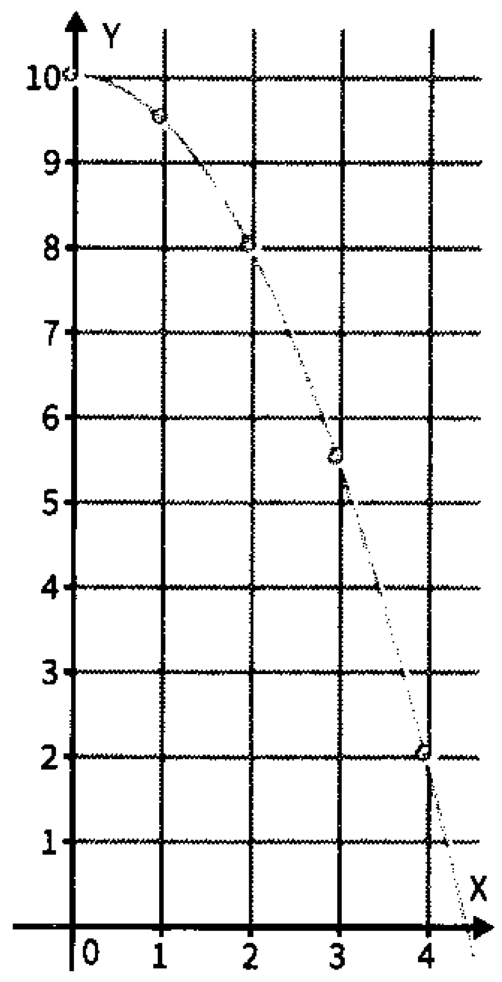
x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



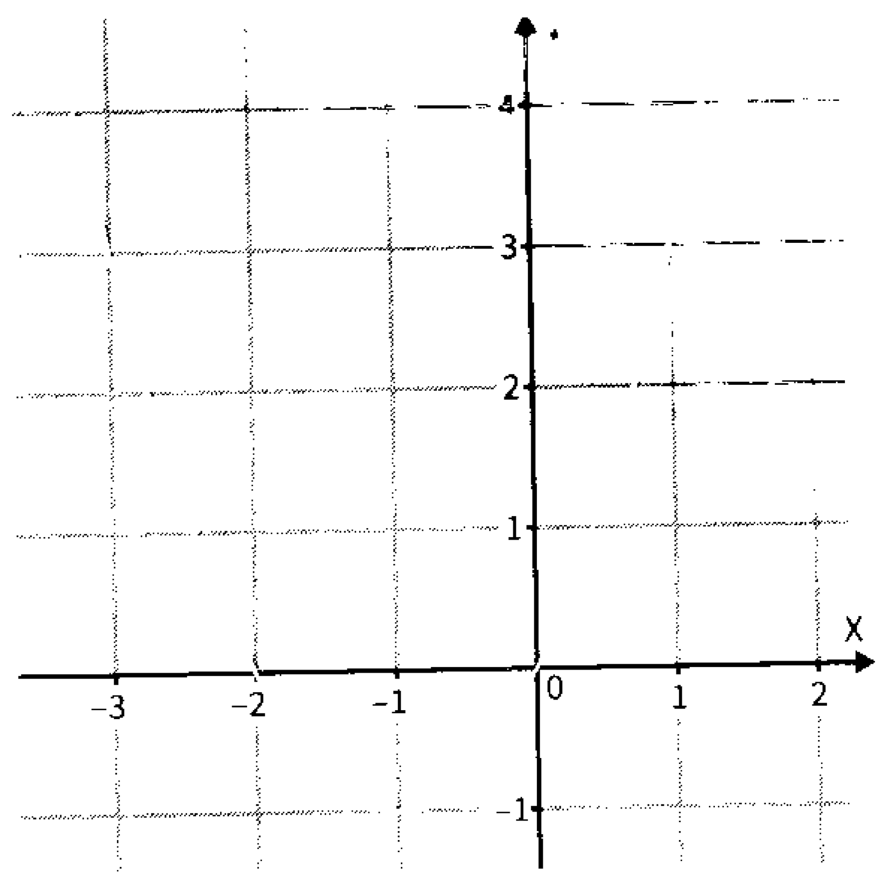
2. La siguiente función es decreciente.

   Sea $f(x) = -x^2 + 20$. Asignando valores para x y sustituyendo obtenemos la tabla.

x	y
0	20
1	19
2	16
3	11



Hay funciones que son crecientes en determinado intervalo y decrecen en otro, por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 2x$, cuya gráfica se ve así:



Como puedes observar, la función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Una manera fácil de saber si una función crece o decrece es mediante su gráfica, desliza tu dedo sobre la línea de la función, de izquierda a derecha.

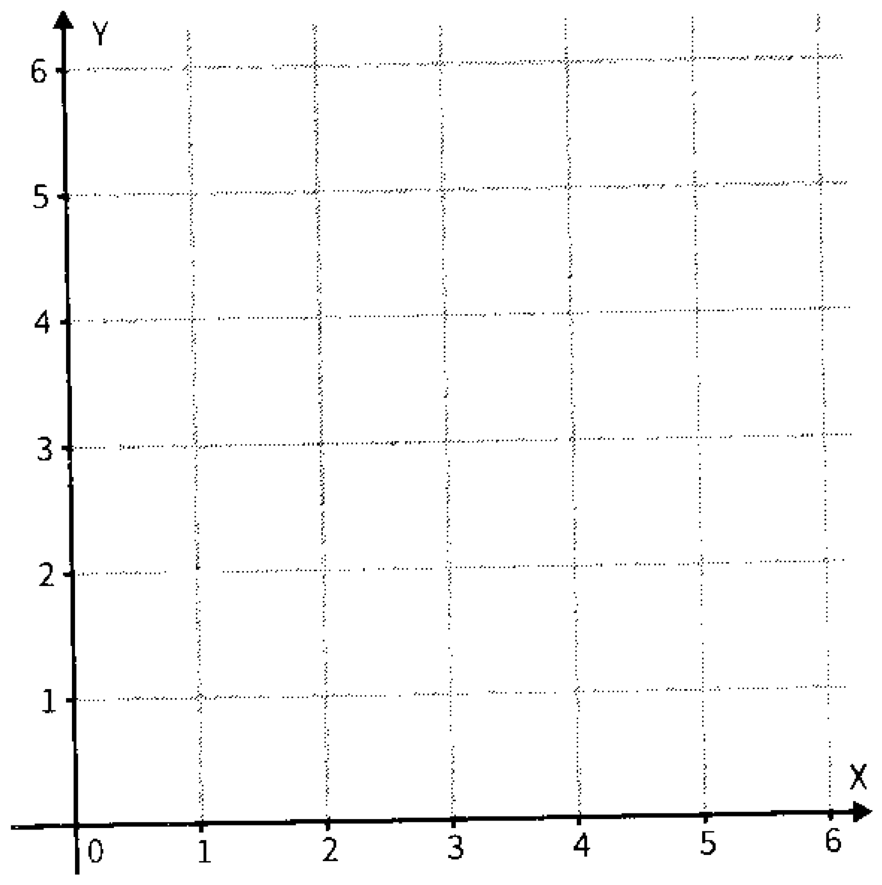
En los lugares donde baje será decreciente y en los lugares donde suba será creciente.

Existen otras funciones, por ejemplo, las funciones con cociente de variables, funciones con exponente mayor que dos, etcétera.

Ejemplo

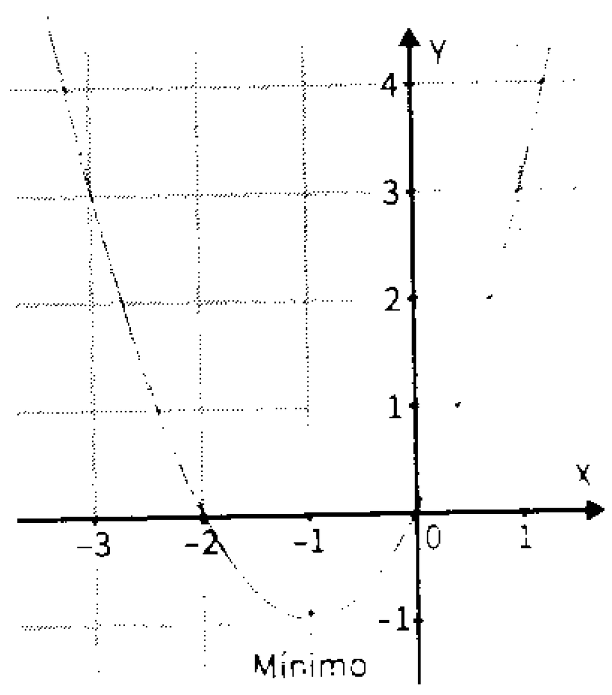
Analicemos la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

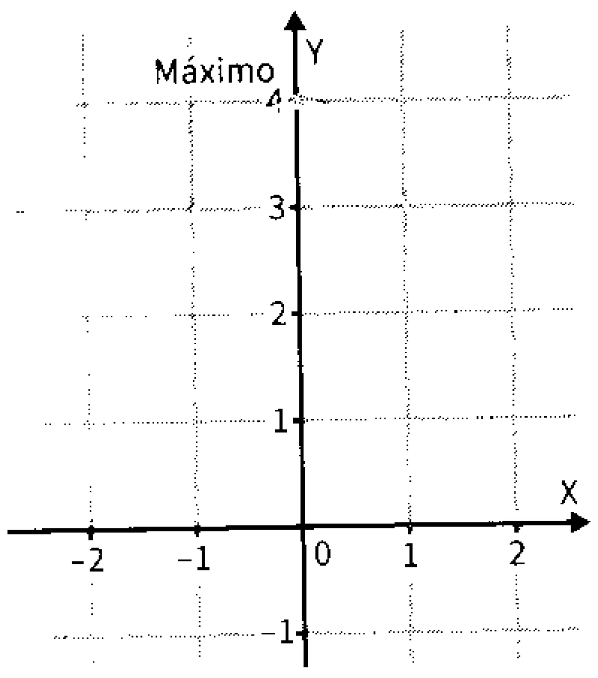
Tomemos valores de x para conocer los valores de la ordenada.



x	y
1	2
2	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{10}{3}$
4	$\frac{17}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

Los máximos y mínimos de una función son aquellos valores más grandes (máximo) o más pequeños (mínimo) de la función, pueden ser en una región (intervalo) o en todo el dominio.





Los máximos y mínimos también se llaman extremos de la función.

Diremos que f tiene un máximo absoluto, si un número $f(x) \le f(c)$, para todo valor de x en el dominio de f, y dicho número es f(c). Si por el contrario, $f(x) \ge f(c)$, para todo valor de x en el dominio de la función f, diremos que f(c) es el mínimo absoluto.

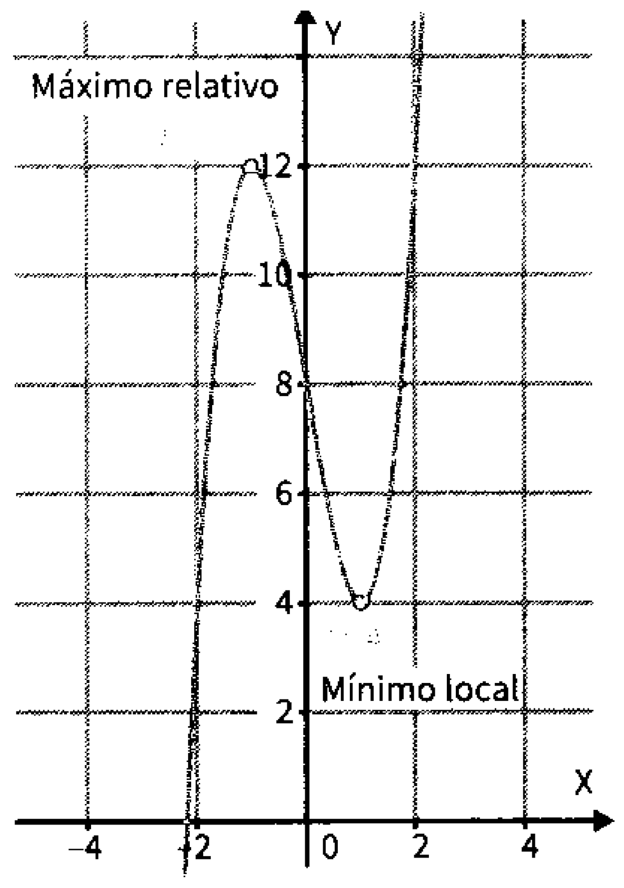
Análogamente, cuando $f(x) \le f(c)$, para todo valor de x en un subconjunto del dominio (intervalo), se dice que f(c) es un máximo relativo o máximo local en el intervalo estudiado, de la misma forma, si $f(x) \ge f(c)$ para todo valor x en un intervalo del dominio, f(c) es un mínimo relativo o mínimo local en el intervalo dado.

Tenemos una propiedad muy importante: una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo local y un mínimo local sobre el intervalo.

Que una función sea continua, significa que no tiene "saltos", gráficamente lo puedes comprobar revisando que la línea no tenga rompimientos. Un caso algebraico consiste en revisar dónde la función no está definida, buscando si en algún valor se indetermina dada su regla de conformación.

Ejemplos

1. La función $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$ tiene como gráfica:

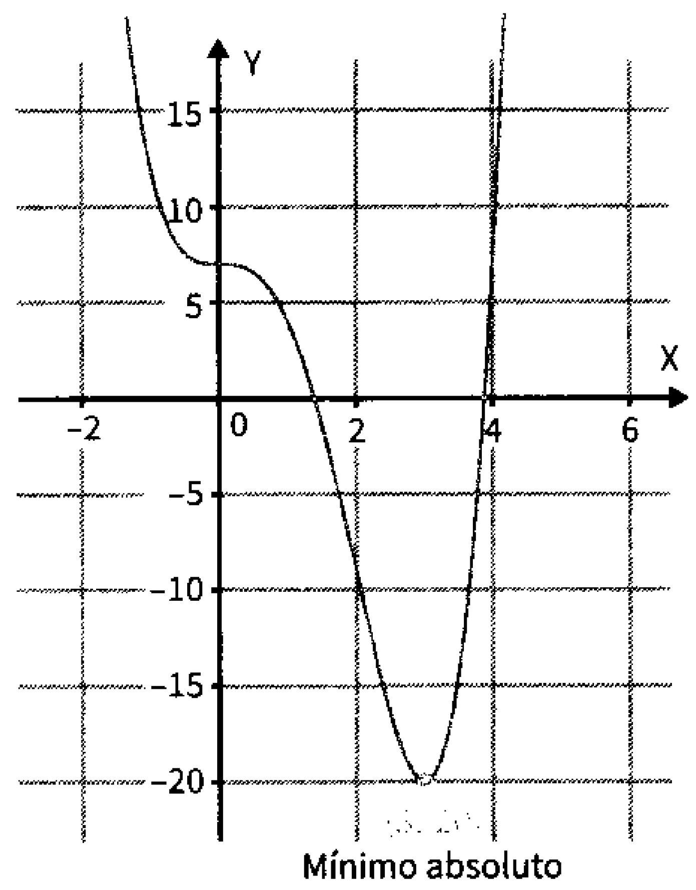


El máximo relativo es (−1, 12) y el mínimo local (1, 4).

La función es continua.

2. La función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$ solo tiene un mínimo absoluto, que es el punto (3, −20).

Esta función también es continua.



Actividad

Grafica las funciones y encuentra máximos o mínimos, si existen.

1. $y = 3x^2$
2. $y = 3x^2 + 3x + 2$
3. $y = x^2 + 8$
4. $y = 8x^2 - 6$
5. $y = -3x^2 + 4x + 2$
6. $y = 2x^2 + 6x + 3$
7. $y = 3x + 2$
8. $y = 5x$
9. $y = 4x + 2$
10. $y = 23x - 4$
11. $y = -3x + 5$
12. $y = 10x + 2 - 5x$

Actividad de aprendizaje 15

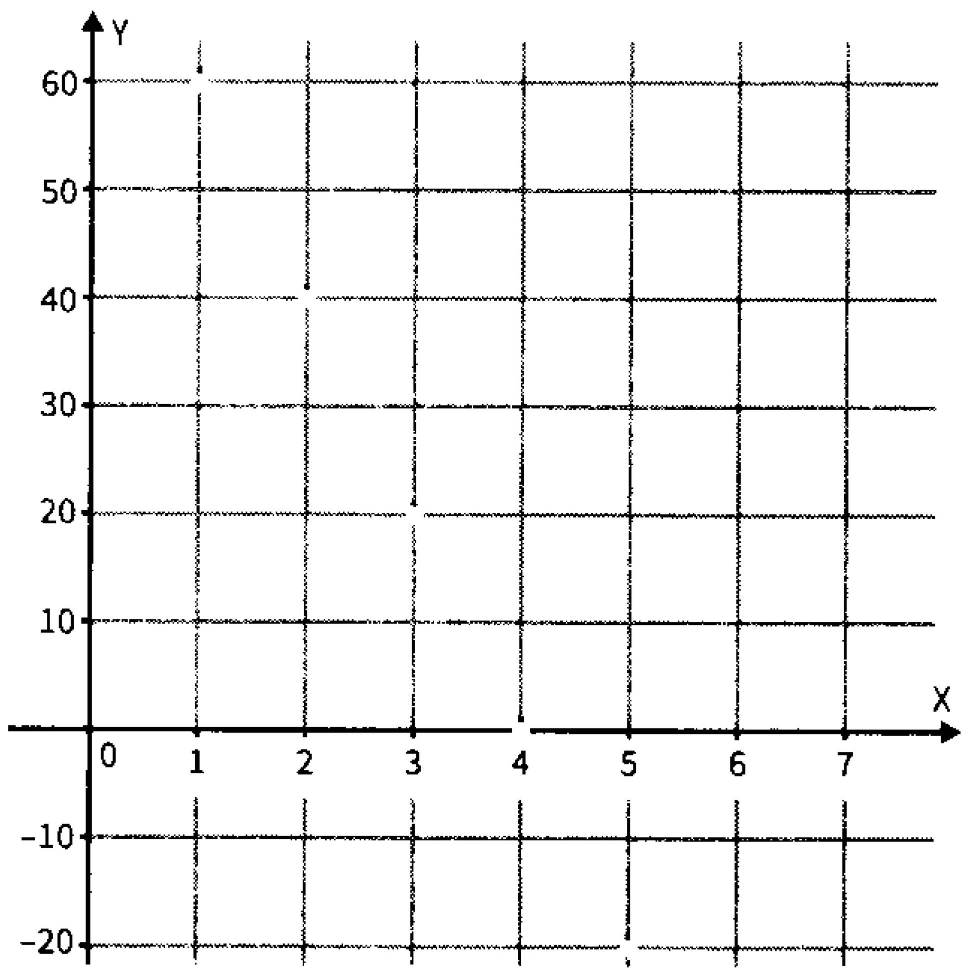
Productos esperados

Encuentra la razón de cambio y grafica las sucesiones.

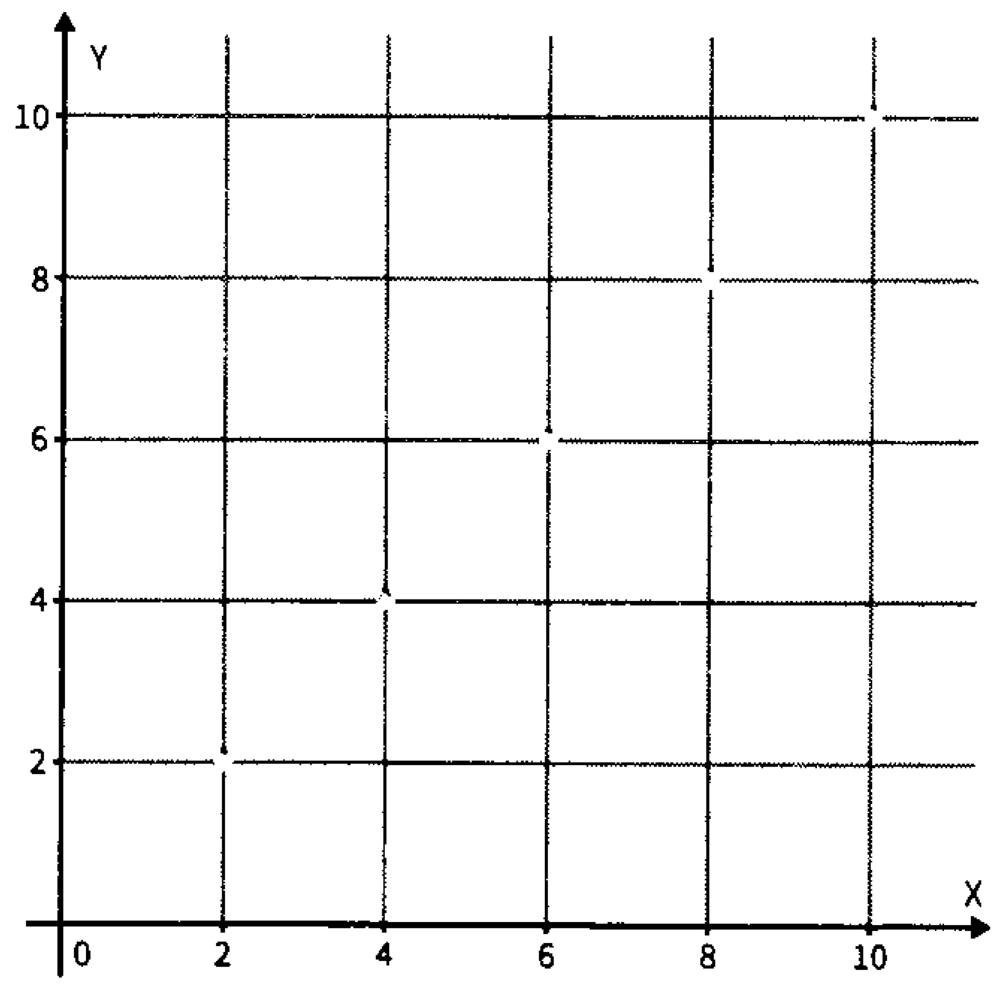
1. 5, 9, 13, 17, ...
2. 6, 3, 0, −3, ...
3. −13, −11, −9, −7, ...
4. −1, 1, 3, 5, ...
5. $a_1 = 5$, $a_5 = 15$, progresión aritmética.

Encuentra la razón de cambio y término general de las sucesiones.

1.



2.



Encuentra el término general y grafica las sucesiones que satisfacen:

1. $\Delta y/\Delta x = -5$, $a_0 = 5$
2. $\Delta y / \Delta x = 3/4$, $a_0 = -7$
3. $\Delta y / \Delta x = -1/7$, $a_0 = 0.5$

Suma anécdota

Como ya lo sabes, la matemática es considerada una de las asignaturas más conflictivas: Eso de trabajar con números y sus propiedades, que todo tiene un porqué y para qué, etcétera. Sin embargo, esto no se aleja de nuestra realidad y vida cotidiana. En las matemáticas tenemos conflictos y en la vida diaria... ¡también!

Figura 1.22

Evariste Galois.

Evariste Galois, matemático que desde muy joven aportó grandes conocimientos al álgebra a una corta edad fue testigo de ello.

En un artículo periodístico se relata:

En este enlace encontrarás la noticia completa: https://elpais.com/elpais/2016/10/24/ciencia/1477307484_183045.html

"Galois nació el 25 de octubre de 1811 y murió el 31 de mayo de 1832, como consecuencia de las heridas por un duelo a pistola celebrado el día anterior.

Su final fue completamente novelesco ya que murió en un duelo a pistola por causas muy poco claras. La noche anterior al duelo escribió tres cartas: una a dos de sus amigos, en la que les anuncia su muerte como consecuencia de un duelo al que le había "sido imposible" negarse; otra dirigida "a todos los republicanos", en la que les pide que no le reprochen no haber muerto por su país, sino hacerlo "víctima de una infame coqueta"."

- ¿Qué emociones albergaba Galois?

- ¿Cómo crees que debió haber reaccionado?

- ¿Crees que se pudo evitar su muerte? ¿Cómo?

- ¿Cómo crees que solía reaccionar ante situaciones conflictivas?

- ¡Respira y piensa que los problemas son para las matemáticas!

Proyecto integrador

En equipos de tres integrantes hagan las actividades. Necesitarán cuaderno, lápiz, cerillos y ¡una cámara fotográfica!

En la imagen se observa una sucesión, reprodúzcanla con los cerillos y busquen la regla para su construcción. Tengan presente que será necesaria la cámara porque tomarán fotos de su sucesión.

1. Determinar los primeros 20 términos. ¿Cómo se ven?

____

2. Determinen las características de la sucesión. ¿Es aritmética? ¿Es geométrica? ¿Es cuadrática? ¿Es lineal?

____

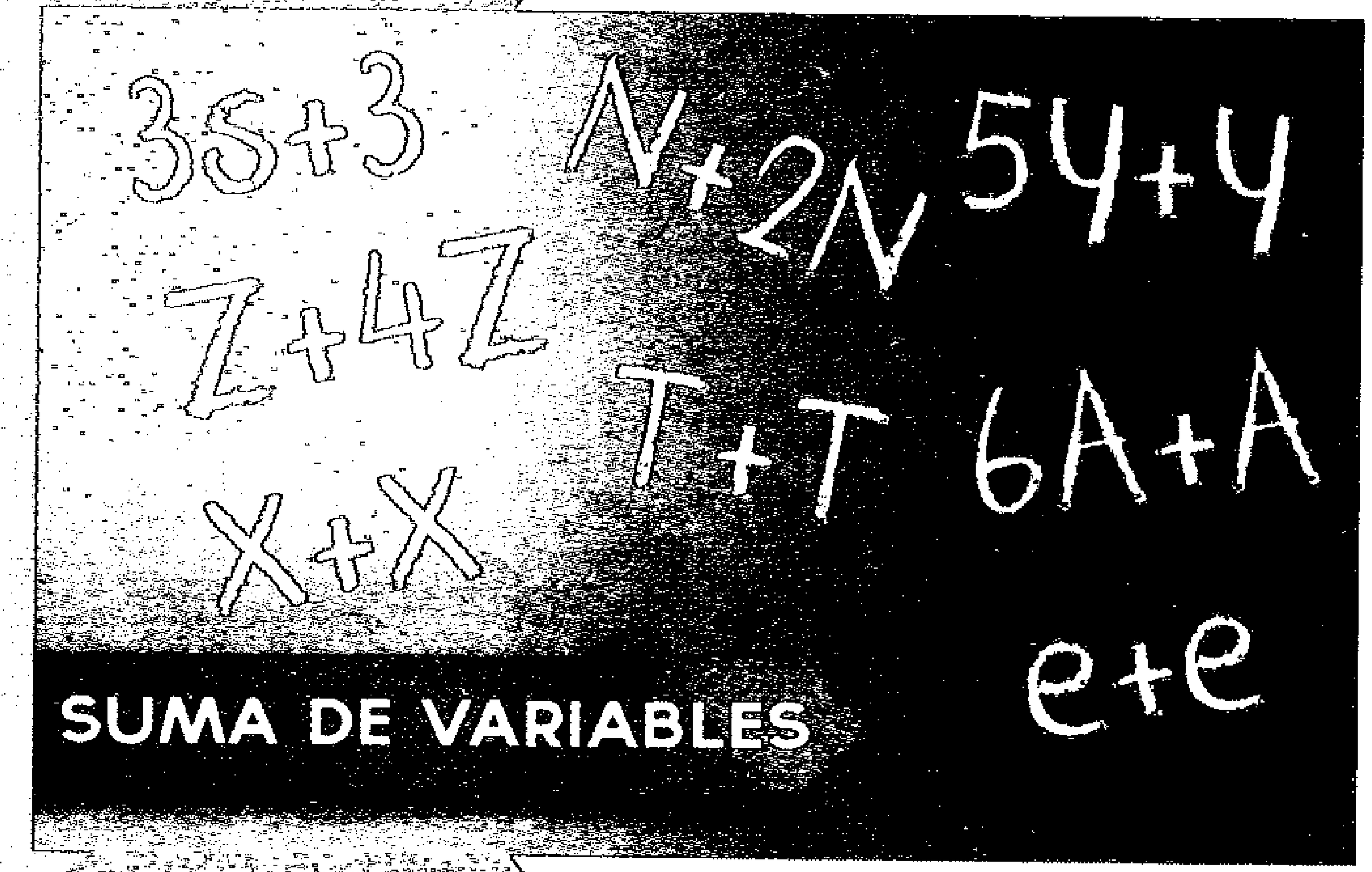
3. Encuentren el término general de la sucesión. ¿Cuántos cerillos necesitarán para el término 100 de la sucesión? ¿Y para el término 500?

____

4. Tracen la gráfica de la sucesión. ¿Es continua? ¿Es lineal? ¿Es cuadrática? ¿Tiene máximos y mínimos? ¿Sus máximos y mínimos, serán absolutos o locales?

____

Cuando hayan concluido, preséntenla a sus compañeros para compartir la información. ¿Todos obtuvieron lo mismo? ¿Qué datos diferentes tienen? ¿Cómo llegaron al resultado? ¡Recuerden sus fotos!



Suma de variables

Usualmente, los conceptos literal, incógnita y variable son confundidos o intercambiados indiscriminadamente.

En este video se presenta el proceso de abstracción de un objeto, la palabra escrita que lo representa y la literal, que concretiza dicho concepto.

Posteriormente, se presenta la idea gráfica de cómo se suman objetos iguales y objetos diferentes..

Hacia la prueba Planea

Utiliza esta sección para preparar tu prueba Planea.

1. Un ejemplo del uso de variable como relación funcional es:
   a. Evaluar $x = 5$ en $f(x) = 2x - 1$
   b. Despejar x en $3x + 5 = 2x - 1$
   c. El valor de x en la expresión $mx + b$
   d. El valor de x en la expresión $y = 2x$

2. ¿A qué conjunto pertenecen los números 0, 0.03, y –5?
   a. $\mathbb{N}$
   b. $\mathbb{Z}$
   c. $\mathbb{Q}$
   d. $\mathbb{Q}^c$

3. ¿Cuál es la expresión que sirve para calcular el promedio de tres números, si uno de ellos es el doble la suma de los otros dos?
   a. $a + b$
   b. $\frac{a+b}{3}$
   c. $2 \cdot \frac{a+b}{3}$
   d. $\frac{a+b}{6}$

4. ¿A qué expresión es equivalente el enunciado: La mitad de la raíz del doble de la suma de dos cuadrados.
   a. $a + b$
   b. $\frac{a+b}{2}$
   c. $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2}$
   d. $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{2}}$

5. ¿Cuál es la sucesión que tiene por término general $a_n = (-1)^{2n}$?
   a. –1, 1, –1, 1, …
   b. 1, –1, 1, –1, …
   c. –1, –1, –1, –1, …
   d. 1, 1, 1, 1, …

6. ¿Qué tipo de número representa la sucesión 1, 3, 6, 10, …?
   a. Triangular
   b. Triangular estrellado.
   c. Cuadrado.
   d. De Fibonacci.

7. ¿Cuál es el término general de la sucesión que tiene diferencia $d = 3$?
   a. $3 + 6n$
   b. $4 - 3n$
   c. $-3 + 3n$
   d. 3

8. ¿La razón de cambio de $y = x$ es?
   a. y / x
   b. 1
   c. x / y
   d. –1

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Abordar situaciones en las que se distinga la variable como incógnita, como número generalizado y como relación de dependencia. Actividad 1.	Identificas la variable en la oración.		
	Conoces la relación operacional entre variables.		
	Clasificas correctamente a la variable en el contexto.		
Representar y expresar simbólicamente enunciados verbales de actividades matemáticas. Actividad 8.	Expresas tus problemas sin ambigüedades.		
	Las expresiones solicitadas coinciden con las tuyas.		
	Hallas las expresiones correctas solicitadas por otros.		
Usar estrategias variacionales (comparar, seriar, estimar) para diferenciar comportamientos lineales y no lineales. Actividad 11.	Reconoces los datos en cada tipo de comportamiento.		
	Identificas correctamente el tipo de sucesión.		
	Encuentras los términos correctos de la sucesión.		
Generalizar comportamientos de fenómenos y construir patrones. Actividad 11.	Comprendes el tipo de sucesión que usarás.		
	Identificas los patrones en tu problema propuesto.		
	Encuentras correctamente el término general.		
Caracterizar los fenómenos de variación constante. Actividad 15.	Reconoces la variación constante en la sucesión.		
	Encuentras los demás términos usando la variación.		
	Identificas tipos de sucesiones de variación constante.		
Representar gráficamente fenómenos de variación constante. Actividad 15.	Construyes correctamente la gráfica.		
	Identificas la variación en la gráfica.		
	Reconoces el tipo de gráfica de sucesiones lineales.		

Rúbrica

- **Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.**

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	
Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.	Identifico operaciones involucradas.	Aíslo los elementos algebraicos.	Resuelvo situaciones algebraicamente.
Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación.	Reconozco relaciones entre variables.	Diferencio entre casos operacionales (aditivo y multiplicativo).	Sé utilizar la jerarquía operacional en cada expresión algebraica.
Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, entre otras.	Relaciono las actividades cotidianas con las operaciones básicas.	Cuido el utilizar las palabras correctas para delimitar las expresiones.	Utilizo analogías, sinónimos y signos de puntuación para distinguir expresiones.
Reconocen la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.	Reconozco las variables y su uso en cada caso.	Utilizo correctamente el uso de cada variable dependiendo del contexto.	Distingo entre los usos de las variables y su relación con el uso de otras variables.
Interpreta y expresa algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.	Enuncio correctamente las propiedades numéricas.	Identifico el uso algebraico de cada propiedad.	Comprendo y uso las relaciones entre propiedades.
Evalúan expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos	Evalúo correctamente expresiones simples.	Utilizo correctamente signos de agrupación.	Simplifico antes de evaluar expresiones.
Reconocen patrones de comportamiento entre magnitudes.	Identifico los patrones en fenómenos.	Relaciono patrones y situaciones.	Utilizo patrones para diferenciar clases.
Formula de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráficamente patrones de comportamiento.	Expreso correctamente un fenómeno y su comportamiento.	Distingo entre tipos de fenómenos y sus gráficas.	Identifico y utilizo vocablos y situaciones intercambiables
Expresa mediante símbolos fenómenos de su vida cotidiana.	Utilizo los símbolos adecuados.	Manipulo signos de agrupación.	Utilizo expresiones equivalentes.
Reconoce fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.	Reconozco las características lineales.	Busco la forma general de un fenómeno.	Propongo situaciones lineales y no lineales.
Diferencia los cocientes y/x y $\Delta y/\Delta x$ como tipos de relaciones constantes entre magnitudes.	Distingo entre una variación y una relación proporcional.	Utilizo la variación para reconocer situaciones.	Relaciono las variables para identificar su comportamiento.
Representa gráficamente fenómenos de variación constante en dominios discretos.	Reconozco la variación constante en una representación gráfica.	Utilizo los parámetros para la construcción de gráficas.	Empleo el menor número de datos para graficar situaciones.

En Book Mart nos ocupamos de proporcionar
soluciones didácticas; por ello, nuestros libros
de herramientas cuyo objetivo es contribuir a
los estudiantes. Estos materiales se enfocan
a todos los estilos de aprendizaje y al desarrollo
conocimiento. Hoy más que nunca, es de
desafiante y atractiva, que logre superar
los lineamientos de nuestro sistema educativo

Estudiantes y facilitadores encuentran en gran
tros materiales didácticos integrales que incluyen

Libro del estudiante

- Aplicación gratuita para teléfono movil

Guía del docente

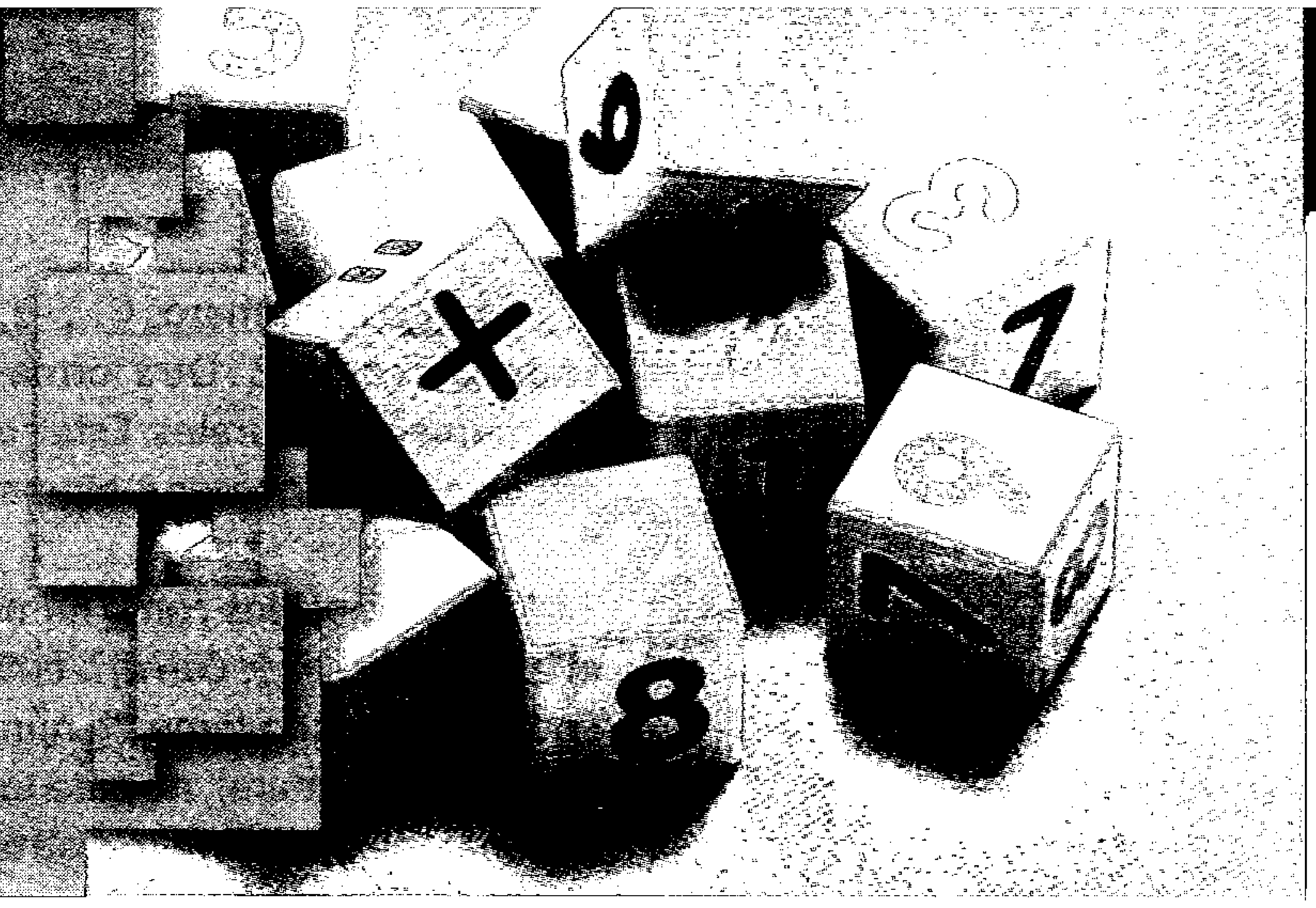
- Respuestas del libro

CD para el docente

- Planeación argumentada
- Lecturas adicionales
- Actividades adicionales
- Reactivos de evaluación adicionales
- Información básica para el docente actual de
- Propuesta metodológica
- Orientación para la evaluación docente para la
- Sugerencias para proyectos transversales
- El problema actitudinal (Construye T)
- Recursos innovadores

www.bookmart.com.mx

Lada nacional sin costo
01 800 101 63 48



Uso de los números y sus propiedades

Los números reales y sus subconjuntos

Desde la Antigua Grecia, Pitágoras veía en los números la clave de la comprensión del universo. Él y los pitagóricos trabajaban los números en forma de figura geométrica como triángulo, cuadrado y pentágono (números naturales) pues desconocían aún el concepto abstracto de número. También crearon una teoría de proporciones para las longitudes de segmentos. Si cada medida de longitud de un segmento se puede expresar con un número, por consiguiente, la proporción entre dos medidas diferentes sería expresable por medio de la razón entre dos números (números enteros). Los pitagóricos pensaban que para dos segmentos *a* y *b* cualesquiera, existía otro segmento *c* que cabía un número entero de veces en *a* y un número entero de veces en *b*.

Figura 1.6

Medida conmensurable.

Fue el matemático Hipaso de Metaponto quien descubrió los números irracionales o inconmensurables y como era de esperar, el descubrimiento de la existencia de estos números alarmó a la escuela pitagórica. Después de este descubrimiento, los griegos prefirieron dedicarse a otra rama de las matemáticas, en la que sin duda no había esos problemas de número, es decir, la geometría.

En el nivel de estudios que te encuentras ya estarás familiarizado con los números, identificas cuánto valen, sabes cómo sumarlos, es decir, las propiedades esenciales, pero, ¿qué pensarías si te dijeran que aún no sabes todo?

Bien, sabes que hay números positivos, negativos, con decimales, fraccionarios, enteros, números como $\pi = 3.1415\ldots$, etcétera. A continuación, daremos la definición de cada conjunto de números.

Iniciamos con los números naturales. Son aquellos que designan la cantidad de elementos que posee un cierto conjunto. Son representados como $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, \ldots\}$$

TIC

En este video puedes observar la clasificación de los números reales.

bkmrt.com/DmOcvK

Al conjunto de números $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ se le conoce como números enteros, se denota como $\mathbb{Z}$. Otra forma de ver a los números enteros es que surgen de la resta de dos números naturales. Este conjunto contiene a los números naturales e incluye a sus opuestos; en términos matemáticos se denota como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

También conocidos como números fraccionarios, el conjunto de números racionales es el conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}$, con a, b enteros y $b \neq 0\}$. Observa que en el conjunto de los números enteros cada uno tiene un número que le sigue (el siguiente al 2 es el 3, el siguiente al –5 es el –4, etcétera), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números racionales existe al menos otro número racional.

Existen las fracciones propias, que es cuando el numerador es menor que el denominador. Si, por el contrario, el numerador no es menor que el denominador estas fracciones son impropias. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \frac{7}{9}$ son fracciones propias, mientras que $\frac{9}{8}, \frac{7}{3}, \frac{12}{4}, \frac{3}{2}$ son fracciones impropias.

Al conjunto de números que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros se les conoce como números irracionales y los denotamos por $\mathbb{Q}^c$, es decir, los irracionales, por definición, son aquellos números que simplemente no son racionales, por ejemplo el muy famoso π. Estos números tienen una infinidad de decimales pero no tienen cifras que se repitan en el mismo orden.

Los números reales pueden ser expresados de diferentes formas, de la manera más sencilla con números enteros y fraccionarios, por ejemplo, el número 45 o $\frac{3}{5}$. Sin embargo, también existen números cuya expresión es más compleja, sus decimales son infinitos como el número π o $\sqrt{2}$; estos números son usados para los cálculos matemáticos, aunque, no se pueden representar como un símbolo numérico único.

Así como los racionales, entre dos números irracionales existe por lo menos uno que también es irracional. De hecho, se ha demostrado que existen más números irracionales que números racionales y aún en nuestros días resulta difícil decidir cuándo un número es racional o irracional, incluso conociendo y aplicando sus propiedades.

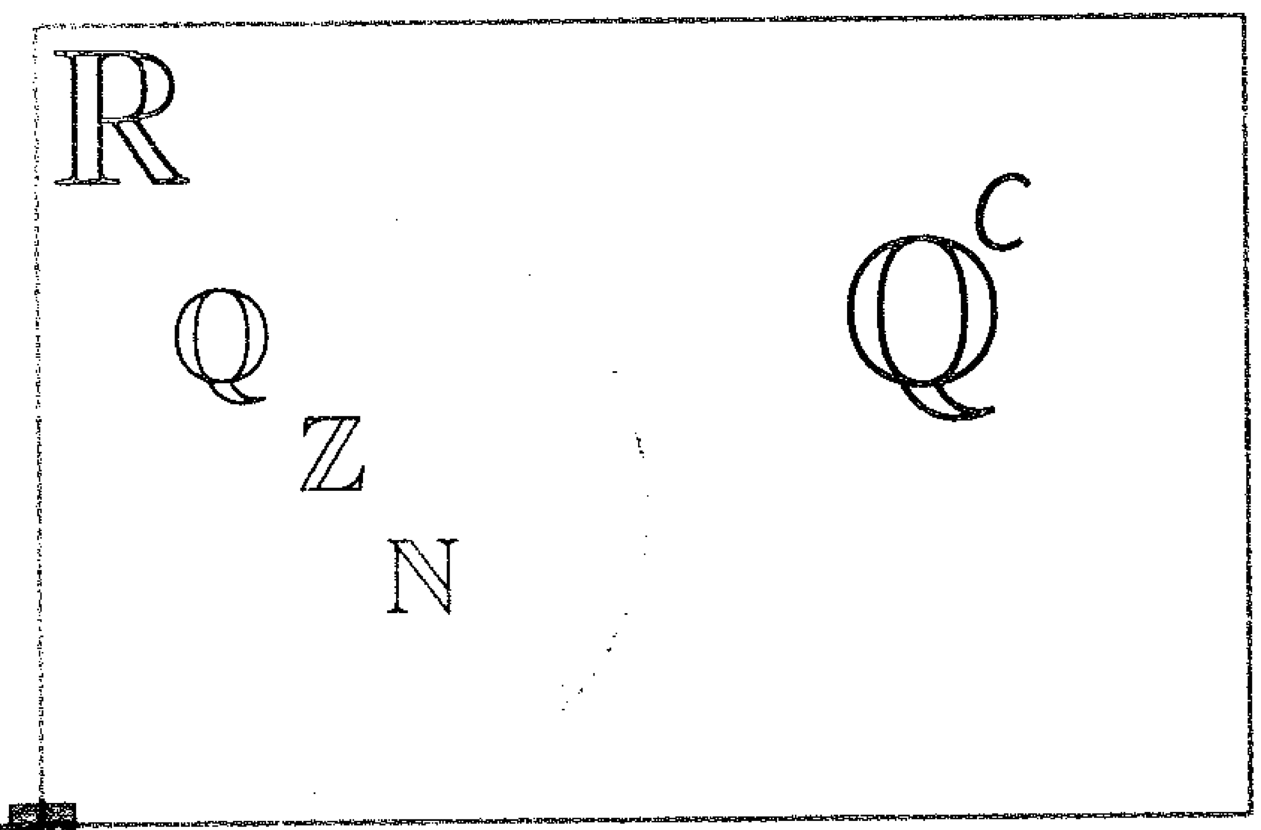


Figura 1.7

Diagrama de Venn para los números reales.

El conjunto de los números reales surge de la unión de los números racionales y de los irracionales. Se representa con la letra $\mathbb{R}$. El diagrama de Venn da una idea de la cantidad de números en cada conjunto. ¿Cuál de todos tendrá menos números?

Se concluye que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, asimismo $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$, sin embargo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ no tienen elementos en común. Puedes apreciar este hecho en la Figura 1.7.

Los números reales aparecen por la necesidad de hacer operaciones más complejas, porque en los siglos XVI y XVII, los avances tecnológicos forzaron a no sólo trabajar con cifras aproximadas sino con expresiones matemáticas de mayor exactitud en los cálculos.

Actividad de aprendizaje 3

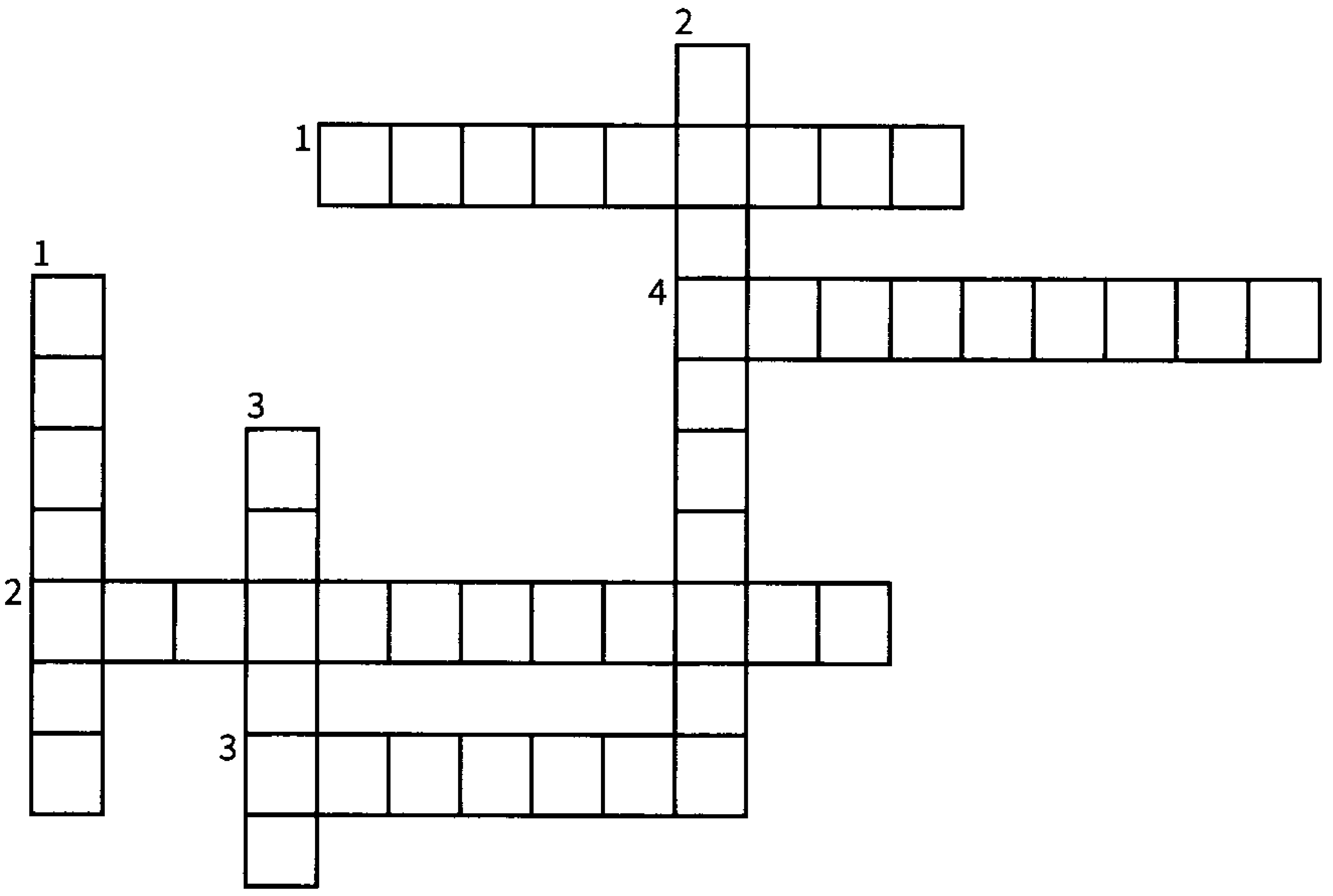
Resuelve el crucigrama.

HORIZONTALES

1. Números enteros que se encuentran a la derecha del cero en la recta numérica.
2. Números que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.
3. Números que surgen de la resta de dos números naturales.
4. Fracciones donde el numerador es mayor que el denominador.

VERTICALES

1. Fracciones donde el denominador es mayor que el numerador.
2. Números reales que pueden expresarse como un cociente *a*/*b*.
3. Números que resultan de la unión de los números racionales y de los irracionales.



TIC

¿Realmente el conjunto de números reales es el más grande? Este video presenta el conjunto de los números complejos.

bkmrt.com/3LM2XY

Propiedades de los reales

Como todo en la vida siempre hay reglas, propiedades que hacen de nuestro sistema una máquina perfecta. En esta sección conoceremos las propiedades que posee el conjunto de los números reales. ¡Claro! No todo es miel sobre hojuelas, pero no es para preocuparse, al contrario, estas propiedades facilitarán el manejo de los números y sus operaciones, así ¡serás todo un experto!

Como recordarás de la sección anterior, el conjunto de los números reales surge de la unión de los números racionales y los irracionales, en notación matemática: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.

Observa que el punto $P_5(\sqrt{2})$ se ubicó de forma aproximada a su valor de 1.4142. Aplicando el teorema de Pitágoras también es posible localizar el punto en la recta. ¿Cómo?

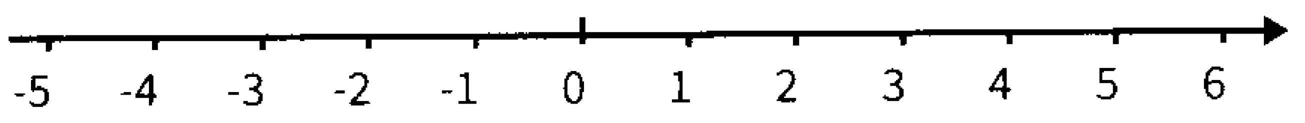
Traza un triángulo cuya base es 1 y con altura de 1; y desde el origen traza, con ayuda de un compás, un arco de circunferencia en sentido de las manecillas del reloj. El punto en que cruza la recta es su representación en la recta numérica.

Los números reales tienen un orden, es decir, hay números de menor valor que otros.

Dados n y m dos números reales cualesquiera, se tiene exactamente una de las tres posibilidades: n es menor que m, ambos (n y m) son iguales o n es mayor que m; en símbolos matemáticos, tenemos:

$$n < m, n = m, n > m$$

Los números reales se pueden representar en una recta continua. A la recta $\mathbb{R}$ sobre la cual se representa a los números racionales e irracionales se le llama recta real.

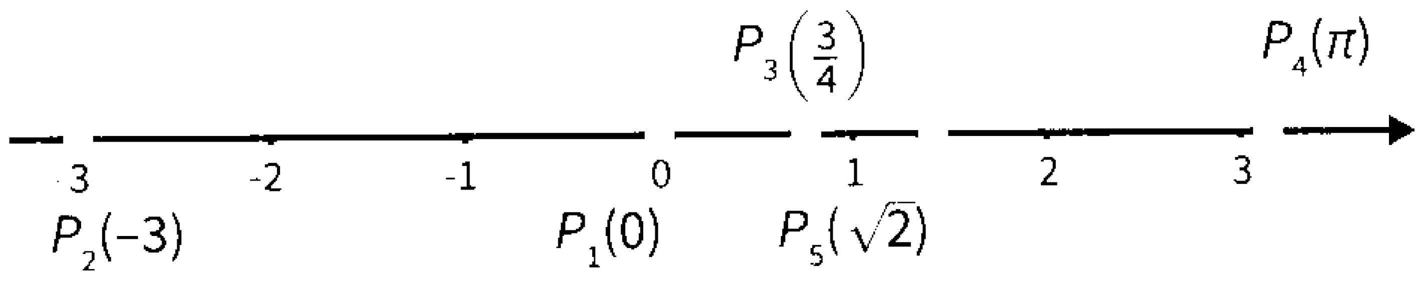


Recta real.

A cada punto p de la recta, al número real a se le llama coordenada o abscisa de p, se denota por $p(a)$, y se lee: punto p de coordenada a.

Ejemplo

Localizaremos estos puntos en la recta real: $0, 3, \frac{3}{4}, \pi, \sqrt{2}$.



Diremos que en $\mathbb{R}$ una operación es una asociación de cada par de números reales, a otro número real bien determinado. Definiremos las operaciones de suma, resta (considerada como la suma de números de diferente signo), multiplicación, división (considerada como la multiplicación de un número por el recíproco de otro distinto de cero, radicación de números positivos y radicación de índice impar de números negativos.

¡Iniciemos!

Sean a, b y c tres números reales cualesquiera. Las propiedades básicas para la suma (+) y el producto (•) en $\mathbb{R}$ son:

Cerradura

$a+b\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $a\bullet b\in\mathbb{R}$

Asociatividad

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad$ $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

Conmutatividad

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \bullet b = b \bullet a$

Es importante observar que la propiedad de conmutatividad no tiene equivalente para la resta, pues si tuviéramos que dos menos un número, por ejemplo tres, es igual que ese número, tres en nuestro caso, menos dos, en consecuencia $2 - 3 = -1$ y $3 - 2 = 1$; tendríamos que $-1 = 1$ ¡lo cual es una locura!

Y sucede lo mismo para la división. Para cualquier número a entre algún número b distinto de cero, el cociente no conmuta, es decir, $\frac{a}{b}$ es distinto de $\frac{b}{a}$, por ejemplo $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$.

4. Elementos neutros

0 es el neutro aditivo y satisface: $a + 0 = a$.

1 es el neutro multiplicativo y es tal que: $a \bullet 1 = a$.

5. Inversos

El inverso aditivo u opuesto de a es $-a$ y cumple que: $a + (-a) = 0$.

El inverso multiplicativo o recíproco de a es $\frac{1}{a}$ si $a \neq 0$ y es tal que: $a \bullet (\frac{1}{a}) = 1$.

6. Distributividad del producto sobre la suma

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Si tenemos la suma de dos números reales $a + b$, al dividir entre b, obtenemos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

Sea el producto de dos números reales $a \bullet b$, al dividir entre b, se obtiene:

$$\frac{a \bullet b}{b} = a \bullet \frac{b}{b} = a \bullet 1$$

De la última propiedad, la fracción se convierte en un número entero, mientras que de la anterior a ésta, la fracción persiste. Es decir, $\frac{a+b}{b} \neq a$.

Ejemplo

Supongamos que tenemos $a = 2$ y $b = 5$, así:

$$\frac{2+5}{5} = \frac{2}{5} + \frac{5}{5} = 0.4 + 1 = 1.4 \text{, mientras que } \frac{2 \bullet 5}{5} = 2 \text{, sin embargo, } 1.4 \neq 2.$$

El valor absoluto de un número real representa la magnitud de dicho número. Esta magnitud es la distancia que existe, sobre la recta numérica, del número dado al cero. La definición formal del valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es decir, si x es positivo o cero, x es su propio valor absoluto y si x es negativo, entonces su opuesto $(-x)$ es el valor absoluto.

Glosario

Conmutar.
Cambiar una cosa por otra.

Asociar.
Juntar una cosa con otra para concurrir al mismo fin.

Distribuir.
Dar a algo su oportuna colocación o el destino conveniente.

Ejemplos

- La magnitud de 3 es 3, por tanto, $|3|=3$.
- La magnitud de $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}$, así, $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Como te habrás dado cuenta, la división entre cero y la extracción de raíces de índice par de números negativos son operaciones que NO se consideran en el conjunto $\mathbb{R}$.

Los intervalos

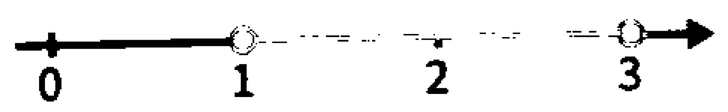
Llamamos intervalo al segmento de la recta real que representa un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si a y b son dos reales tales que $a < b$, entonces los intervalos son subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos como:

1. Cerrado. Cuando sus extremos pertenecen al subconjunto. Se representa como $[a, b]$ y comprende todos los números reales x que satisfacen: $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a,b]$.
2. Abierto. Cuando sus extremos no pertenecen al subconjunto. Se representa como (a, b) y comprende todos los números reales x que cumplen: $\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a,b)$.
3. Semiabierto por la izquierda. Cuando el primer extremo no pertenece al subconjunto y el segundo extremo sí. Se representa como $(a, b]$ y comprende todos los números reales x que cumplen: $\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a,b]$.
4. Semiabierto por la derecha. Cuando el primer extremo pertenece al subconjunto y el segundo extremo no. Se representa como $[a, b)$ y comprende todos los números reales x que cumplen: $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a,b)$.
5. Infinito. El infinito, positivo o negativo, no es un extremo determinado, así que siempre será abierto. Existen cinco casos:
   a. Cerrado a la izquierda. Satisface $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x\} = [a,\infty)$.
   b. Cerrado a la derecha. Cumple $\{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} = (-\infty,b]$.
   c. Abierto a la izquierda. Es compone de $\{x \in \mathbb{R}, a < x\} = (a,\infty)$.
   d. Abierto a la derecha. Se conforma de $\{x \in \mathbb{R}, x < b\} = (-\infty,b)$.
   e. Abierto completamente, este contiene a todos los reales. Está compuesto por: $\{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

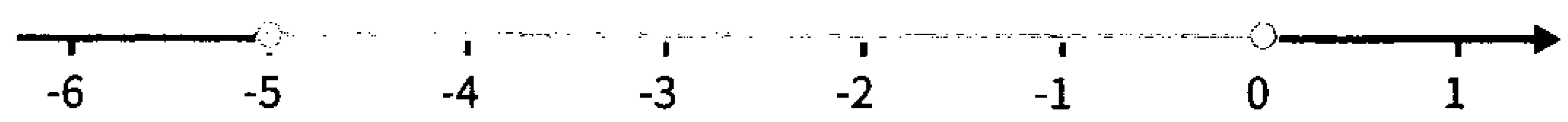
Ejemplos

Graficaremos los intervalos.

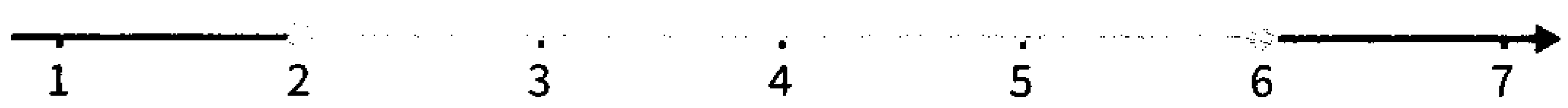
(1, 3), por definición, es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3\}$ y su gráfica es:



2. $[-5, 0]$ representa al conjunto $\{x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le 0\}$ y se grafica:



3. $(2, 6]$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}, 2 < x \le 6\}$. Su gráfica es:



4. $[-4, \infty)$, se representa como $\{x \in \mathbb{R}, -4 \le x\}$ y se grafica:

5. $(-\infty, 3)$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$. Se dibuja:

Leyes de los exponentes

Sea x un número real, si se multiplica por sí mismo se obtiene $x \bullet x$. Si se vuelve a multiplicar por sí mismo se tiene $x \bullet x \bullet x$. Así, sucesivamente, si x se multiplica por sí misma n veces, se obtiene:

$$\underbrace{x \bullet x \bullet x \bullet \cdots \bullet x \bullet x}_{n \text{ veces}}$$

Para $x \bullet x = x^2$, $x \bullet x \bullet x = x^3$, $x \bullet x \bullet x \bullet x = x^4$, …, entonces, para n veces:

$$\underbrace{x \bullet x \bullet x \bullet \cdots \bullet x \bullet x}_{n \text{ veces}} = x^n$$

Donde x es llamada base y el número n es llamado exponente. El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

- Primera ley de los exponentes. Dados un número real x distinto de cero y dos números naturales n, m, se cumple que:

$$x^n \bullet x^m = x^{n+m}$$

Ejemplos

1. $\left(\frac{3}{4}x^4y\right)(5xy^8) = \frac{15}{4}x^5y^9$

2. $(3a^6b^2)(a^2b^3) = 3a^8b^5$

Segunda ley de los exponentes. Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m, así, se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

Ejemplos

$$\frac{x^3}{x^5}=x^{3-5}=x^{-2}$$

$$\frac{864}{-36}=\frac{2^5 3^3}{-2^2 3^2}=-2^{5-2}3^{3-2}=-2^3 3$$

$$\frac{27x^4y^9}{36x^2y^4}=\frac{3}{4}x^2y^5$$

$$\frac{28w^3y^6}{48w^7y^3}=\frac{7}{12}w^{-4}y^3$$

Tercera ley de los exponentes. Sea x un número real diferente de cero, se tiene que:

$$x^0=1.$$

Ejemplos

$$3x^0=3$$

$$\frac{30b^4}{6b^4}=5$$

$$(xyz)^0=1$$

Cuarta ley de los exponentes. Al elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Sea x un número real distinto de cero y dos números naturales n y m, se cumple que:

$$(x^n)^m=x^{n\cdot m}.$$

Ejemplos

$$(2^4)^3=2^{4\cdot 3}=2^{12}$$

$$(x^3)^3=x^{3\cdot 3}=x^9$$

Quinta ley de los exponentes. El producto de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual al producto de cada factor elevado al exponente.

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n, se cumple que:

$$(xy)^n=x^ny^n.$$

Ejemplos

$$(3y)^4=3^4y^4=81y^4$$

$$(-2ab^3)^2=(-2)^2a^2b^{3\cdot 2}=4a^2b^6$$

- Sexta ley de los exponentes. El cociente de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual al cociente de cada factor elevado al exponente.

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n, se cumple que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}.$$

Ejemplos

1. $\left(\frac{x}{y}\right)^3=\frac{x^3}{y^3}$
2. $\left(\frac{4a^5}{5b}\right)^3=\frac{64a^{15}}{125b^3}$

- Séptima ley de los exponentes. Sea un número real x diferente de cero, si n es un número entero, por las leyes anteriores se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^n}=x^{n-n}=x^0=1.$$

Recordemos que el recíproco del número real x^n se definió como $\frac{1}{x^n}$, ya que cumple con $x^n\bullet\frac{1}{x^n}=1$. Asimilando esta relación con la séptima ley se obtiene:

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}.$$

Ejemplos

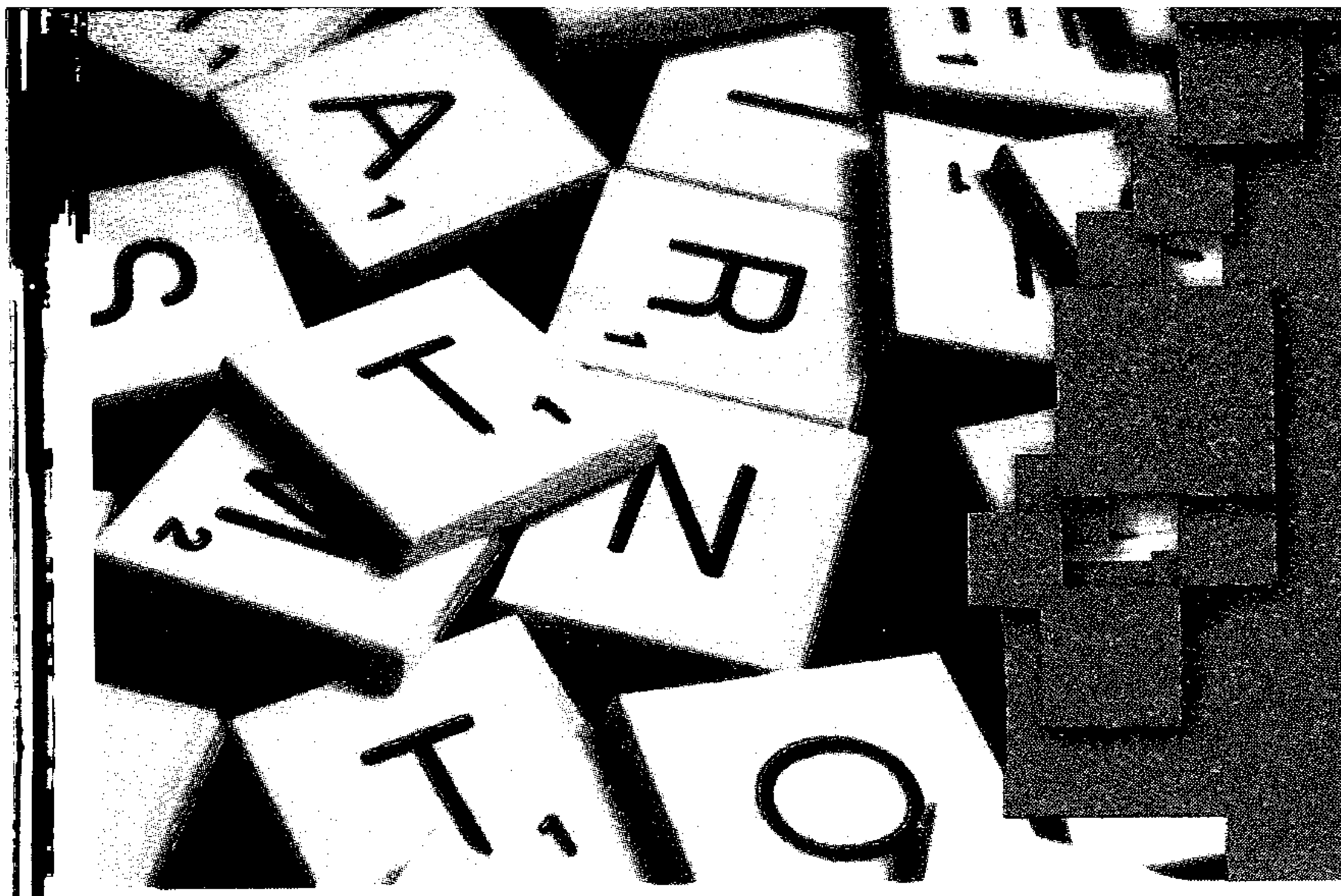
1. $x^{-1}=\frac{1}{x}$
2. $7a^{-4}=\frac{7}{a^4}$
3. $(2x^2)^{-4}=2^{-4}x^{-8}=\frac{1}{2^4}\bullet\frac{1}{x^8}=\frac{1}{16x^8}$

Actividad de aprendizaje 4

Realiza lo que se pide.

1. Dibuja en la recta real los siguientes intervalos.
   a. $(1,5)$
   b. $[-2,0]$
   c. $[-9,-6]$
   d. $[3,\infty)$
   e. $(-\infty,0]$
   f. $(-\infty,\infty)$

2. Efectúa correctamente las operaciones.
   a. $(3x^2y)(4x^3y^5-xy)$
   b. $\frac{10a^3+b^2}{2a^2b}$
   c. $(xy^2+2xy-\frac{1}{3}x^3y)^0$
   d. $(2ab^3)^5$
   e. $\left(\frac{2xy^3z^4}{4x^3yz^6}\right)^3\left(\frac{4xy}{3}\right)$
   f. $\frac{9xyz}{3x^2yz^3}$



Conceptos básicos del lenguaje algebraico

Tratamiento algebraico de enunciados verbales

Como vimos, las expresiones algebraicas están formadas por constantes y variables conectadas por operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). En esta sección aprenderás a transformar enunciados, es decir problemas, donde hay valores desconocidos, en una expresión algebraica. Y si bien recuerdas, a aquella variable que no conocemos la denotaremos por una letra, si hay más de una, las letras serán diferentes.

Iniciemos con un ejemplo. Imagina que estás leyendo el libro del matemático hindú Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi y te encuentras con el siguiente enunciado:

> "Eso" y diez es multiplicado por "eso" menos diez, entonces esto es lo mismo que si se dijera "eso" multiplicado por "eso", es un cuadrado positivo, y diez por "eso" son diez "esos" positivos; menos diez por "eso" son diez "esos" negativos, ahora restamos lo negativo de lo positivo, y sólo queda un cuadrado, menos diez, que es cien, que se debe sustraer del cuadrado. Por lo tanto, resulta un cuadrado de "eso" menos cien.

El lenguaje algebraico describe situaciones.

¿Qué quiso decir Mohammed? ¿Qué es lo que llama "eso"? Pareciera una película de terror, pero ¡no! Éste podría ser uno de los ejemplos de que en la antigüedad las propiedades o fórmulas se expresaban en el lenguaje más natural.

Para resolver este texto hacemos uso del lenguaje algebraico. Supongamos que la letra x representa a "eso" de lo que tanto habla Mohammed, obtenemos:

$$(x+10)(x-10)=x \bullet x+10x-10x-10 \bullet 10=x^2-100.$$

Veamos un ejemplo más sencillo. En la sección anterior conociste los números racionales, definidos así: "todo número que puede expresarse de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros, con la condición de que b no debe ser cero".

Esto se traduce a la expresión: $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}, \text{ con } a, b \text{ enteros y } b \neq 0\}$.

Viéndolo de esta forma, no resultó la gran cosa, ¿no es así? Es tan simple como ¡trabajar correctamente con las matemáticas!

Para problemas más sencillos como el triple de un número, denotaremos como n al número desconocido, entonces $3n$ representa el triple de dicho número. En la tabla te mostramos más.

Ejemplo

Problema	Expresión algebraica
La tercera parte de un número.	$\frac{x}{3}$
El cuadrado de un número más 10.	x^2+10
La suma de los cuadrados de dos números.	x^2+y^2
El doble de un número incrementado en cinco equivale a la tercera parte del número disminuido en cuatro.	$2x+5=\frac{x}{3}-4$

Observación. El "equivale" del problema se representa con el signo =.

En las representaciones algebraicas es importante el uso correcto de los paréntesis para expresar la situación que deseamos, no colocar adecuadamente los paréntesis es uno de los errores más frecuentes, por ejemplo, si expresamos algebraicamente el enunciado: "El doble de: un número cualquiera más cinco".

Figura 1.10

Los paréntesis cambian significados.

¿Qué expresión usarías? $2x + 5$, ¿no es así? Si tu respuesta NO fue esa, ¡felicidades! Has prestado atención a los dos puntos que dividen a la oración, así, la expresión correcta es $2(x+5)$. Dependiendo de donde partas, siempre debes prestar atención a qué deseas comunicar o cómo lo expresas. El caso contrario: "El doble de un número cualquiera, más cinco". Fíjate dónde se encuentra la coma, la expresión correcta es $2x + 5$.

Ahora ya sabes a qué debes prestar atención. En la tabla tenemos un problema, deberás encontrar las expresiones para dar con el resultado.

Piensa en un número.	x
Súmale dos.	
Multiplícalo por tres.	
Réstale uno.	
Súmale cuatro.	
Divídelo entre tres.	
Réstale tres.	

¿Qué número resultó? ____________________

Veamos un caso más.

Hace diez años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de trece años. ¿Qué edad tengo ahora?

Si representamos como y la edad actual que tengo, es decir, y = edad actual, si tengo 20 años ahora, obtenemos 20 – 10 = 10 años. Como usamos y para representar mi edad actual, mi edad hace 10 años se presenta con $y - 10$. Similarmente, mi edad dentro de 13 años sería $y + 13$. Por último, la palabra "mitad" significa $\frac{1}{2}$. Por tanto, la expresión algebraica del enunciado es:

Hace diez años tenía $\underbrace{\text{la mitad de la edad que tendré dentro de trece años}}$

$$\frac{1}{2}(x+13)$$

Actividad

Resuelve los problemas.

1. Ana y Luisa desean representar con una expresión algebraica a los números impares, para Ana, la expresión $2n + 1$ es la correcta, pero Luisa argumenta que la expresión $2n - 1$ lo es. ¿Quién tiene la razón?
2. ¿Por qué el resultado de sumar un número par con un impar es siempre impar?
3. Al sumar dos múltiplos de cinco, el resultado es múltiplo de cinco. ¿Por qué?
4. El producto de dos números es cero, si un factor es uno, ¿cuál es el otro factor?, ¿qué propiedad se usó?

Elige la expresión algebraica que representa cada caso.

1. El cuadrado de la suma de tres números.

   $(x+y+z)^2$

   $x^2+y^2+z^2$

   $4(x+y+z)$

2. El cuádruple de un número cualquiera, más 15.

   $4+x$

   $4x+15$

   $x+15$

3. El triple de: un número más su mitad.

   $3x+\frac{1}{2}$

   $3x+2$

   $3(x+\frac{1}{2})$

4. El cuádruple del cuadrado de un número

   $(4a)^2$

   $4a^2$

   $2a^4$

Representa las siguientes situaciones.

1. La edad de Ángel es el triple de la edad de Liz.
2. En vacaciones, la maestra de Pedro les dejó de tarea leer la misma cantidad de páginas, para terminar el libro en d días. ¿Cuántas páginas diarias leía Pedro?
3. Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.
4. Dos veces la suma de cuatro y un número es igual a seis menos que el mismo número. ¿Cuál es el número?
5. Hace dos años, Luis tenía la tercera parte de la edad que tendrá dentro de cinco años. ¿Qué edad tiene Luis?
6. Expresión algebraica que da las unidades del triple de un número de tres cifras a, b, c.

Para cada una de las expresiones, escribe un problema cuya respuesta sea esa expresión.

1. $2x+1$
2. $(\sqrt{x})^2$
3. $3b$
4. $(x+y)-10$
5. $\frac{45}{100}a$
6. $5c+10d$

Interpretación de las expresiones algebraicas y de su evaluación numérica

Si tenemos una expresión algebraica y le damos un valor numérico a las variables que se encuentran en la expresión, diremos que estamos evaluando dicha expresión. Cuando evaluamos una expresión algebraica se convierte en una expresión aritmética, ya que trabajamos con números.

Muchas expresiones algebraicas surgen de problemas concretos donde se describen relaciones entre cantidades desconocidas, al evaluarlas está claro que se trata de números. También, nos sirve para verificar un resultado, es decir, por qué cierto resultado puede ser incorrecto. Por ejemplo, evaluar en distintos valores a n nos ayuda a comprender por qué la representación de un número impar es $2n+1$ o $2n-1$.

Por ejemplo, al evaluar la expresión $2x-10$ en $x=2$, obtenemos $2(2)-10=4-10=-6$. Estamos reemplazando el valor dos cada vez que aparece x en la expresión. Pero, ¿qué sucede si tenemos más de dos variables?

Si tenemos una expresión que involucra más de una variable, los valores que podemos considerar pueden ser distintos o los mismos. Por ejemplo, evaluaremos la expresión $3x+2xy-y$ en $x=2, y=2$:

$$3x+2xy-y=3(2)+2(2)(2)-(2)=6+8-2=12.$$

Pero si evaluamos en $x = 3$, $y = 2$: $3x + 2xy - y = 3(3) + 2(3)(2) - (2) = 9 + 12 - 2 = 19$.

La jerarquía de operaciones nos indica el orden en que debemos operar. Comenzando con las de 1 y terminando con las de 3.

En caso de que las operaciones sean adyacentes y tengan el mismo orden, se efectúan de izquierda a derecha.

Para evaluar una expresión algebraica es importante que recuerdes la jerarquía de las operaciones vistas en aritmética:

1. Potencias.
2. Productos y cocientes.
3. Sumas y restas.

Existen expresiones que no pueden ser evaluadas tomando cualquier valor, por ejemplo, la expresión $\frac{2xy-5}{x-y}$ no se puede evaluar cuando $x = y$, de lo contrario, el denominador resultaría cero. Así, los valores de x y y deben ser distintos.

Ejemplos

Julieta está haciendo su tarea de álgebra y encontró la expresión $\frac{2x}{x+4} \cdot 4$, ella la evaluó en $x = 5$ y obtuvo:

$$\frac{2(5)}{5+4} \cdot 4 = \frac{2(\cancel{5})}{\cancel{5}} = 2$$

¿Qué error cometió Julieta?

Eliminó el 4 del primer factor ubicado en la suma del denominador y este mismo número del segundo factor. Una manera correcta de resolverlo sería:

$$\frac{2(5)}{5+4} \cdot 4 = \frac{10}{9} \cdot 4 = \frac{40}{9} \text{ y } \frac{40}{9} \neq 2$$

Además de tener en cuenta la jerarquía de operaciones, debemos poner mucha atención a la asociatividad.

Pepe sabe que si obtiene arriba de 8 en su promedio general, sus papás le cooperarán para adquirir una consola de videojuegos, pero tiene estas calificaciones: 7, x, 8 y 6. ¿Qué calificación debe alcanzar si desea un promedio de 9? ¿Obtendrá su consola?

El promedio de Pepe está dado por la expresión:

$$9 = \frac{7 + x + 8 + 6}{4}.$$

Efectuando las operaciones, tenemos:

$$9 = (21 + x)/4,\ (9)(4) = 21 + x,\ 36 = 21 + x.$$

Necesitamos un número que sumado con 21 dé 36, lo que resulta $x = 15$.

Vemos que para tener un promedio de 9 debe ser un 15 la calificación faltante, pero eso no es posible. Por lo tanto, sus papás no le cooperarán, ¡qué triste!

Actividad de aprendizaje 6

Evalúa las expresiones algebraicas.

1. $\dfrac{10+x+32-9}{4x}$, en $x = 3$.
2. πr^2, con $r = 3$.
3. $2x^2 + 10x + 12$, en $x = -2$.
4. $\dfrac{4x+2y}{5}+x^2$, en $x = 0$.
5. $E = mc^2$, donde $m = 3$ y $c = 7$.

Resuelve los problemas.

1. Calcula el volumen de un cilindro cuya base circular tiene 5 cm de diámetro y 9 cm de altura.
2. Encuentra la distancia que recorre un motociclista en 10 minutos cuando va a una velocidad de 100 km/h.

Operaciones algebraicas

Como vimos en secciones anteriores, el monomio es la representación algebraica más elemental y sus componentes son: signo, coeficiente, literal(es) y exponente(s).

Las operaciones algebraicas son las mismas que las aritméticas, porque se tratan de los mismos objetos: números reales.

Adición de expresiones algebraicas

En la adición o suma de expresiones algebraicas es necesario introducir el concepto de términos semejantes.

Llamamos términos semejantes a aquellos términos que, sin importar el coeficiente, tienen las mismas literales elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplos

1. De la siguiente expresión: $3x^2y - 2x - 4xy + 24x^2y - y^3$, los términos semejantes son $3x^2y$ y $24x^2y$.

   Por tanto, la expresión se simplifica:

$$27x^2y - 2x - 4xy - y^3.$$

La expresión $10a^4b + 7x - 2a^4b^2 - 8a^4x - a^4b + 2ab - 32a^4b$ tiene términos semejantes: $10a^4b$, $-a^4b$ y $-32a^4b$.

La expresión se simplifica a $-23a^4b + 7x - 2a^4b^2 - 8a^4x + 2ab$.

Concluimos que para la adición de expresiones solo se suman los términos semejantes, siempre que tengan el mismo signo se pone éste y se suman los coeficientes, de lo contrario, se pone el signo del coeficiente resultante de la diferencia y se restan los coeficientes, las literales se colocan con sus exponentes correspondientes.

Ejemplo

Sumaremos las expresiones $5y^2 + 3xy - 10x^2y$ y $25x^2 - 20xy - 6x^2y^3$.

$$(5y^2 + 3xy - 10x^2y) + (25x^2 - 20xy - 6x^2y^3) = 5y^2 + 3xy - 10x^2y + 25x^2 - 20xy - 6x^2y^3.$$

Reduciendo los términos semejantes $3xy$ y $-20xy$:

$$5y^2 - 10x^2y + 25x^2 - 17xy - 6x^2y^3.$$

Resta de expresiones algebraicas

La resta de dos polinomios se obtiene al cambiar el signo de los elementos del sustraendo y después sumar algebraicamente todos los términos.

Ejemplos

Restaremos las expresiones..

$x^2 + 3y - 5xy^2$ y $yx^2 - 4xy + 20xy^2$.

Así $(x^2 + 3y - 5xy^2) - (yx^2 - 4xy + 20xy^2) = x^2 + 3y - 5xy^2 - yx^2 + 4xy - 20xy^2$. Sumando algebraicamente, obtenemos: $x^2 + 3y - 25xy^2 - yx^2 + 4xy$.

$3ab^2 - 5b + 10ab$ y $5ab^2 + 2ab - 3a^2$.

Por tanto, para resolver $(3ab^2 - 5b + 10ab) - (5ab^2 + 2ab - 3a^2)$, se cambia de signo a todos los términos $5ab^2 + 2ab - 3a^2$ y se suma algebraicamente al polinomio $3ab^2 - 5b + 10ab$. Obteniendo:

$3ab^2 - 5b + 10ab - 5ab^2 - 2ab + 3a^2 = -2ab^2 - 5b + 8ab + 3a^2$

Multiplicación de expresiones algebraicas

Para multiplicar dos monomios: Se aplica la regla de los signos y los coeficientes se multiplican, cuando las literales son iguales se escribe la literal y sumamos los exponentes (gracias a la primera ley de los exponentes), si, por el contrario, las literales son diferentes, se coloca cada una con su respectivo exponente.

Cuando multiplicamos dos expresiones con el mismo signo, el producto tiene signo positivo, si se multiplican expresiones con signo contrario, es decir, una con signo positivo y otra con signo negativo, el producto tiene signo negativo. Figura 1.11.

Primer factor	Segundo factor	Resultado
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−

Figura 1.11
Propiedades de los signos.

Ejemplos

1. Para multiplicar $3xy^2$ por $9y^2$, los coeficientes se multiplican, el exponente de y será la suma de ambos exponentes del factor 1 y factor 2 y como x solo está en el factor 2 se escribe x con el mismo exponente:

$$(3xy^2)(9y^2) = (3)(9)xy^{2+2} = 27xy^4.$$

2. Multiplicaremos $2a^2b^5$ por $-9a^3b$. Con la misma dinámica, obtenemos:

$$(2a^2b^5)(-9a^3b) = (2)(-9)a^{2+3}b^{5+1} = -18a^5b^6.$$

Para multiplicar dos expresiones se utiliza la propiedad de la distributividad de la multiplicación sobre la adición. Es decir, se efectúa multiplicando cada término del primero por cada término del segundo factor, aplicamos las leyes de los signos a los coeficientes y de los exponentes a las literales con sus exponentes respectivos, por último, se suman los términos semejantes.

Ejemplo

Multiplicaremos $x^2y^3 + 2x - 5y^3$ por $5xy + 2x^3y$.

Obtenemos: $(x^2y^3 + 2x - 5y^3)(5xy + 2x^3y) = (x^2y^3 + 2x - 5y^3)(5xy) + (x^2y^3 + 2x - 5y^3)(2x^3y)$. Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, después sumamos términos semejantes para obtener una expresión simplificada:

$$(x^2y^3 + 2x - 5y^3)(5xy) + (x^2y^3 + 2x - 5y^3)(2x^3y) = -5x^3y^4 + 10x^2y - 25xy^4 + 2x^5y^4 + 4x^4y.$$

División de expresiones algebraicas

En la división de dos monomios aplicamos estas reglas para los coeficientes:

- El cociente de dos números positivos, es positivo.
- El cociente de dos números negativos, es positivo.
- El cociente de un número positivo entre uno negativo, es negativo.
- El cociente de un número negativo entre uno positivo, es negativo.

Para los demás elementos: dividimos los coeficientes (si es posible), para las literales, si se encuentran tanto en el denominador y numerador: si el exponente del numerador es el mayor se pone la literal en el numerador y al exponente se le resta el exponente de la literal del denominador, de otra forma se pone la literal en el denominador y a su exponente se le resta el del numerador.

Ejemplo

Efectuaremos las divisiones.

$6x^2y^3$ entre $2xz$. Dividimos los coeficientes, se aplica la segunda ley de los exponentes a las literales, en este caso solo a la literal x, pues es la que se encuentra en el denominador y numerador, quedando:

$$\frac{6x^2y^3}{2xz}=\frac{3xy^3}{z}.$$

$11a^3b^6c$ entre $5abc^3$. Obtenemos:

$$\frac{11a^3b^6c}{5abc^3}=\frac{11a^2b^5c^{-2}}{5}=\frac{11a^2b^5}{5c^2}.$$

Actividad

Efectúa las operaciones algebraicas.

1. $2xy + 34x^2y - 10x^2y^3$ más $32y - 59x^2y + 2x^2y_3$.
2. $32a^3b^{10} - \frac{1}{2}ac^3 + 7a^5b^3$ más $4a^2b^9 - 5ac^3 + 20ab^3$.
3. $3c^2d^5 - 5a^2c^2 + 10a^5c^3 - 3a^2b^9$ menos $20c^2d^5 - 2a^2c^2 - 7a^5c^3$.
4. $24xy^5 + 8x^3y^2 - 4x^5y^3$ menos $-6x^5y$.
5. $4xy + 3x^2y^3 + 2xy^3$ multiplicado por $6x^4y - 2x^3y$.
6. $-3a^3c + 2a^2b^6 - 3a^2b^5$ multiplicado por $2b^2c^3 + 2a^3b - a^2b$.
7. Divide $13x^2y - 5x^3y^2 + 2xy$ entre $3xy$.
8. Divide $18a^3bc + 4a^3b^3 - 6ab^2$ entre $2a^2b$.

Actividad de aprendizaje 8

Productos esperados

Pon en práctica tus conocimientos de esta sección y ¡crea tus problemas!

En tu cuaderno, inventa cinco problemas, si es necesario hojea la sección.

Una vez escritos tus problemas, escríbelos en lenguaje algebraico y dales la solución correcta. Plantéalos a dos compañeros de salón y responde esto.

1. ¿Qué dificultades encontré?
2. ¿He llegado a su expresión algebraica?
3. Al exponer los problemas escritos a mis compañeros, ¿externaron que eran fáciles o difíciles? ¿Llegaron rápidamente a la solución?

Compara tu problemario con el de tus compañeros.

De los patrones numéricos a la simbolización algebraica

Sucesiones y series numéricas particulares representadas mediante dibujos, tablas y puntos en el plano

Números figurados

Las expresiones algebraicas también se utilizan para expresar patrones, es decir, la expresión surge a partir de casos particulares para expresar una regla general.

En la escuela pitagórica nacieron diversos resultados que dieron pauta al desarrollo de las matemáticas, sobre todo a los números.

Cuando una representación toma la forma de un polígono como un triángulo o un cuadrado, el número que caracteriza cada figura se llama número figurado. Los números figurados forman, por ejemplo, una sucesión de números que se crea al contar los vértices de polígonos que en cada posición crecen. A partir de un polígono determinado podemos construir diferentes sucesiones.

Recordando las sucesiones, los términos están conformados por la letra que designa a la sucesión y un subnúmero que determina el elemento de la sucesión. Por ejemplo, para la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, …, n tenemos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, …, $a_n = n$. Llamamos término general, denotado por a_n, a la regla que determina todos los elementos de la sucesión.

La escuela pitagórica fue fundada en Crotona, al sur de Italia, hacia el año 530 a. n. e. Era una sociedad casi religiosa donde los trabajos se mantenían en secreto.

A los miembros de la escuela pitagórica se les conocía como los pitagóricos, ellos consideraron que toda la naturaleza estaba hecha a imagen de los números.

Diremos que una sucesión es recurrente si para calcular un término es necesario conocer el término anterior.

Por ejemplo, los polígonos estrellados que son configuraciones geométricas tales que cada término de la sucesión posee un polígono exterior adicional al término anterior. Por lo tanto, tendremos tantos números figurados estrellados como polígonos queramos representar.

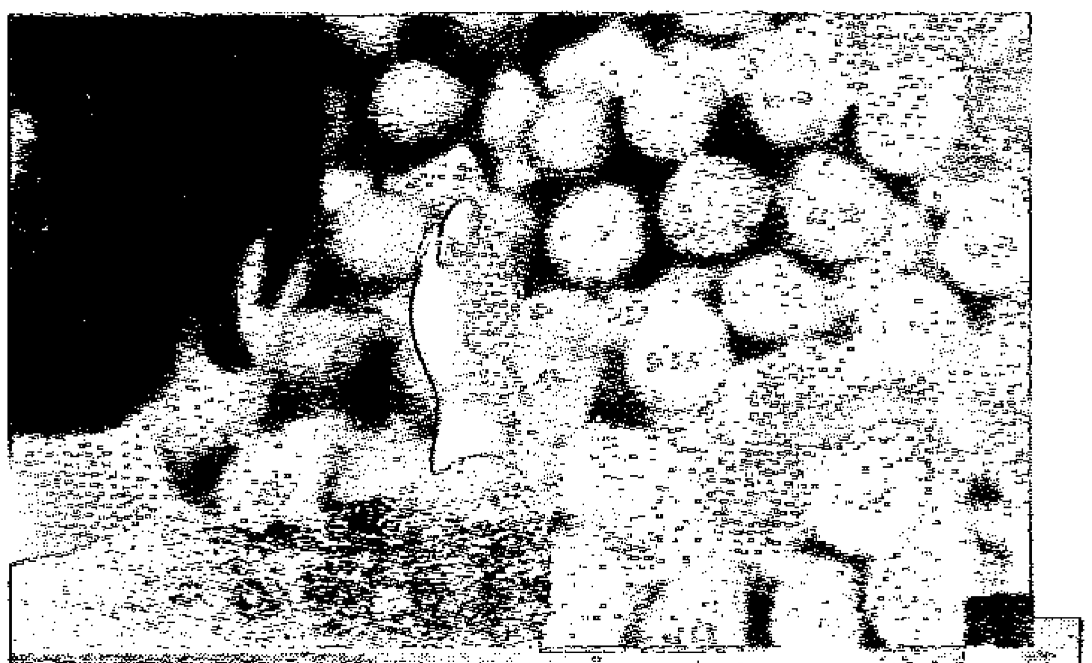
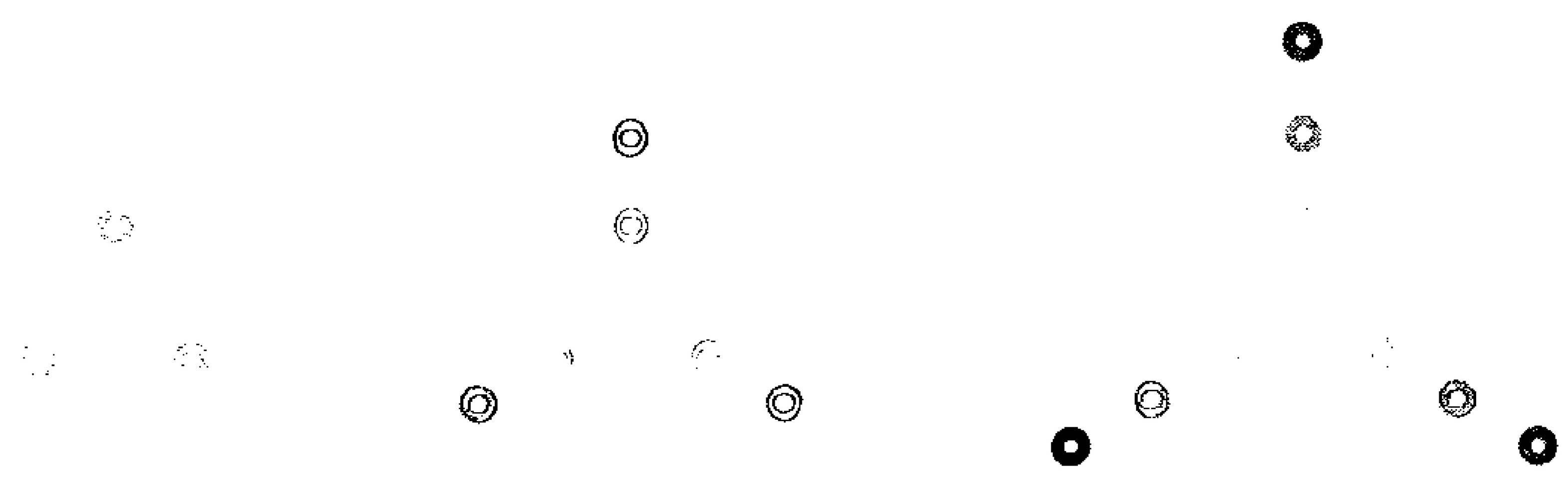


Figura 1.12

Los números figurados se ilustran con puntos.

Otro ejemplo son los números triangulares estrellados que se definen como sucesiones geométricas de puntos en forma de triángulo, de modo que cada término posee un triángulo exterior adicional al término anterior.



Como observas en la figura, en el primer término hay un elemento, en el segundo ya se han sumado tres, así sucesivamente. Tenemos pues, esta sucesión:

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, \ldots, a_n = a_{n-1} + 3.$$

Observa que esta sucesión es recurrente. Para encontrar el término general, hacemos esto:

$1 = a_1 = 1 + 3(1 - 1)$

$4 = a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 1 + 3(2 - 1)$

$7 = a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \bullet 3 = 1 + 2 \bullet 3 = 1 + 3(3 - 1)$

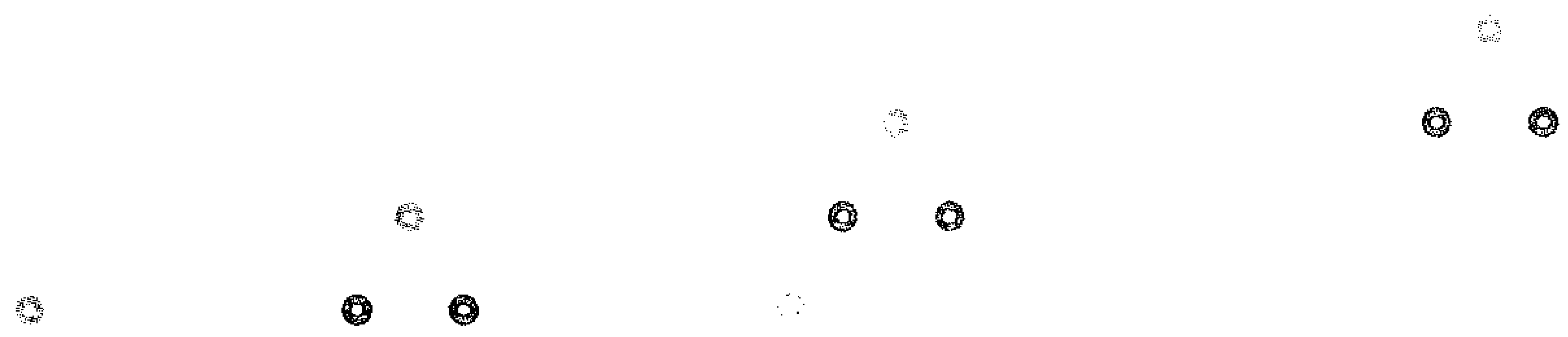
$10 = a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 2 \bullet 3 + 3 = a_1 + 3 \bullet 3 = 1 + 3 \bullet 3 = 1 + 3(4 - 1)$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + 3 = 1 + 3(n - 1)$

Concluimos que si deseamos saber el número de elementos necesarios para añadir 8, es decir el término a_9, tendríamos $a_9 = 1 + 3(9 - 1) = 1 + 3(8) = 25$ vértices.

La siguiente sucesión se forma agregando un nuevo lado a la base del triángulo anterior, de tal manera que quede un nuevo triángulo cuya longitud es más grande que la del anterior.



Tenemos estos términos: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, \ldots, a_n = a_{n-1} + n.$

Esta sucesión es recurrente. Para encontrar el término general, tenemos:

$1 = a_1 = 1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$

$3 = a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = \frac{3 \cdot 2}{2}$

$6 = a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Observa la Figura 1.13. Como verás, calcular los valores de la sucesión se relaciona con el número del término, es decir, la posición en la que se encuentra.

El término general es más que obvio. Tomamos los términos (posiciones) y los multiplicamos por sí mismos:

$a_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$

$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$

$\vdots$

$a_n = n^2$

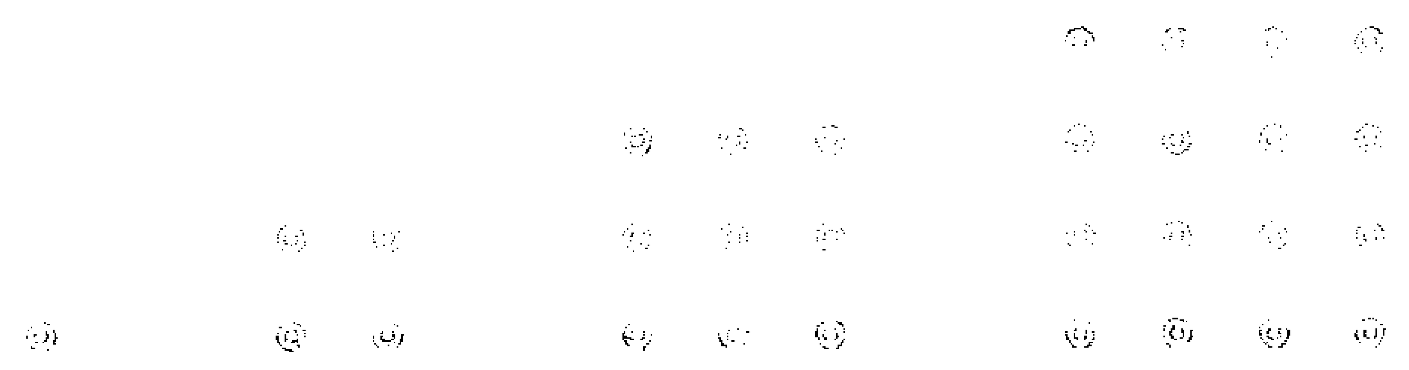


Figura 1.13

Veamos un ejemplo más.

La sucesión que se muestra en la Figura 1.14 tiene forma pentagonal, se crea añadiendo cinco botones cada vez a cada uno de los términos anteriores.

Por tanto, tenemos estos términos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 5 = 6$

$a_3 = 1 + 5 + 5 = 11$

$\vdots$

$a_n = a_1 + 5(n - 1)$

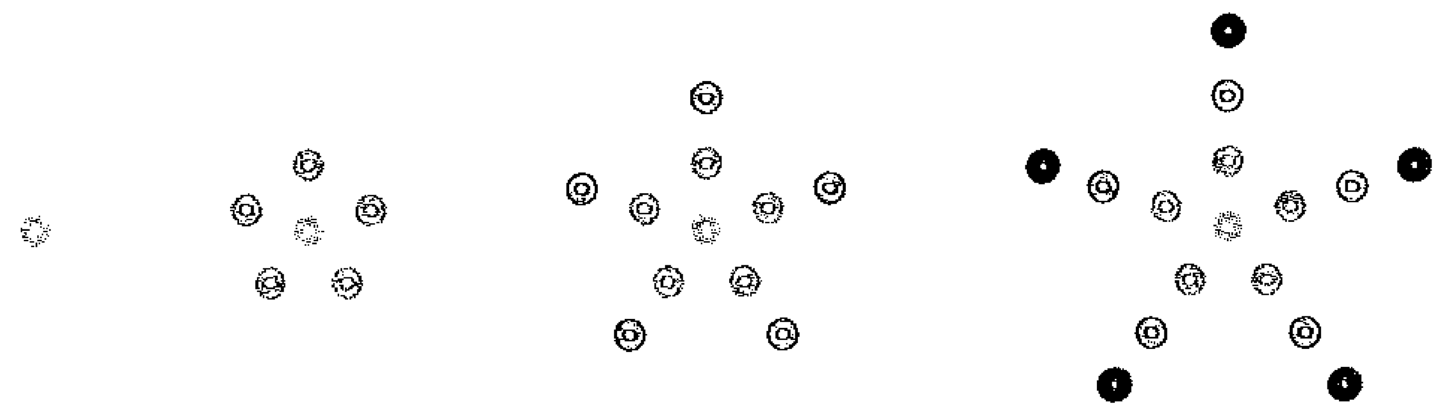


Figura 1.14

Concluimos, para los números estrellados de orden *m,* que se calculan conociendo cuántos lados tiene el polígono (n), el término general es:

$$a_n = 1 + m(n - 1).$$

Ejemplo

Observa la sucesión. Sigue los pasos que indican para encontrar el término general.

					…
$a_1 =$ ____	$a_2 = 1 + 3(\ ) - 3 =$ ________	$a_3 = 1 + 3(\ ) - 3 =$ ________	$a_4 = 1 + 3(\ ) - 3 =$ ________	$a_5 = 1 + 3(\ ) - 3 =$ ________	$a_n =$ ¿?

¡El término general es $a_n = 1 + 3(n) - 3$!

Diremos de una sucesión, cuyos términos sucesivos, dado el primero, se forman sumando un número fijo para obtener el siguiente, se denomina progresión aritmética. Al número fijo se le llama diferencia común de la sucesión y comúnmente se denota por la letra d.

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$, ¿por qué?

Observa su desarrollo:

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

A continuación se presentan algunas propiedades de una progresión aritmética.

1. Si la diferencia es positiva, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que el anterior.
2. Si la diferencia es cero, la progresión es constante, es decir, todos sus términos tienen el mismo valor.
3. Si la diferencia es negativa, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.

Ejemplo

Estas sucesiones son aritméticas.

a. 3, 7, 11, 15, …   b. 8, 2, –4, –10, …

La diferencia d se obtiene restando cualquier término de la progresión del término consecuente. De manera general, la razón o diferencia se obtiene aplicando la fórmula:

$$d = a_{k+1} - a_k.$$

Para demostrar que una sucesión es aritmética debemos probar que tiene la misma diferencia entre todos sus términos.

Ejemplos

1. Probaremos que la sucesión 1, 4, 7, 10, …, $3n - 2$, … es aritmética.

   Es claro que la diferencia es 3, de manera formal, tenemos:

   $a_{k+1} - a_k = ((3(k+1) - 2) - (3k - 2))$, de donde $a_{k+1} - a_k = 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3$.

2. Hallaremos el 30° término de la progresión aritmética $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \ldots$

   Tenemos que $a_1 = \frac{2}{3}$ y $d = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$, así, $a_{30} = a_1 + 29d = \frac{2}{3} + 29\left(\frac{5}{6}\right)$, resultando $a_{30} = \frac{149}{6}$

Esta fórmula te ayudará a calcular la suma de los términos entre el elemento a_1 y a_n:

$$S = \frac{(a_n - a_1 + d)(a_1 + a_n)}{2d}.$$

Como puedes ver, solo es cuestión de saber la diferencia entre los términos consecutivos.

Ejemplo

Si la suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética, cuya diferencia es 11, vale 66, encontraremos estos términos.

Los términos son $x + (x + 11) + (x + 11 + 11) = 66$. Entonces, tenemos la expresión $3x + 33 = 66$, debemos encontrar un número que al multiplicarlo por 3 y al sumarle 33 dé 66, dicho número es 11.

Tenemos los números 11, 22, 33. Podemos expresarlo como $a_1 + a_2 + a_3 = 66$, es decir, como la suma de los tres primeros términos de una progresión cuyo término general es: $a_n = a_1 + 11(n - 1)$.

Dada una sucesión de términos en la que cada elemento se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo r, llamado razón, la llamaremos sucesión geométrica.

Sea a_1 el primer término de una sucesión geométrica, por tanto:

a_1

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$\vdots$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ es el término general de la sucesión geométrica.

Podemos calcular el valor de r con la fórmula $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

¿Cómo podemos identificar una sucesión geométrica? Si al tomar algún término y al dividirlo entre su antecesor, obtenemos un número igual que si lo hacemos para cualquier otro término dividido entre su antecesor. Si el valor es constante, el número que resultó deberá ser r.

Las sucesiones geométricas tienen estas propiedades.

Si la razón está comprendida entre cero y uno, la progresión decrece, es decir, cada término es menor que el anterior.

Si la razón es mayor que uno, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que el anterior.

Si la razón es menor que cero, la progresión es alterna, es decir, sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplos

Determinaremos si la sucesión 1, 3, 9, 27, ... es una progresión geométrica.

Observa que $r_1 = \frac{27}{9} = 3$, $r_2 = \frac{9}{3} = 3$ y $r_3 = \frac{3}{1} = 3$. Por lo tanto, se trata de una sucesión geométrica con razón $r = 3$.

Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots$, encontraremos el término a_6.

Tenemos que $r = \frac{1}{3}$, resulta que $a_6 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{243}\right) = \frac{1}{486}$.

La suma de los términos de una sucesión geométrica es:

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Es necesario saber el primer término, la razón y la cantidad de términos en la serie geométrica para realizar la suma de los primeros n términos de la progresión.

Ejemplo

Calcularemos la suma de los primeros 10 términos de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Tenemos, $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ y $n = 10$. Así:

$$S = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{1024} - \frac{1024}{1024}\right) = \frac{1023}{1024}.$$

Actividad de aprendizaje 9

Realiza los ejercicios.

1. Si el cuarto término de una progresión aritmética es 5 y el noveno término es 20, obtén el duodécimo término.
2. Determina si la sucesión 1, 2, 4, 8, … es una progresión aritmética.
3. Hallar los términos primero, segundo y décimo de la sucesión $a_n = 5n - 3$.
4. Halla la diferencia y el término general de la progresión aritmética: –8, –4, 0, 4, …
5. Halla la diferencia de una progresión aritmética sabiendo que el primer término es 3 y el sexto es 23.
6. Los lados de un cuadrilátero están en progresión aritmética de diferencia 6. Si el primero es 52 cm, calcula la longitud de sus lados.
7. Encuentra la suma de los primeros 10 términos de la serie 1, 3, 9, …
8. Calcula la suma de los primeros cinco términos de: 500, 1 000, 1 500, 2 000, 2 500, …
9. Halla el término general de las progresiones geométricas.

5, 1, 1/5, … 4, 2, 1, … 5, 10, 20, 40, …

Análisis variacional de los patrones numéricos

Como vimos, las sucesiones representan un patrón de números. Una relación entre dos variables puede representarse gráficamente en el plano cartesiano. En éste, como sabes, localizamos puntos a partir de la abscisa y la ordenada, es decir, (x, y). La abscisa se localiza sobre el eje horizontal y la ordenada en el eje vertical.

El término n de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Para graficar esta sucesión, usamos a_n en el eje vertical y n para el eje horizontal, por tanto, solo necesitamos saber el primer término y el valor de d.

Ejemplo

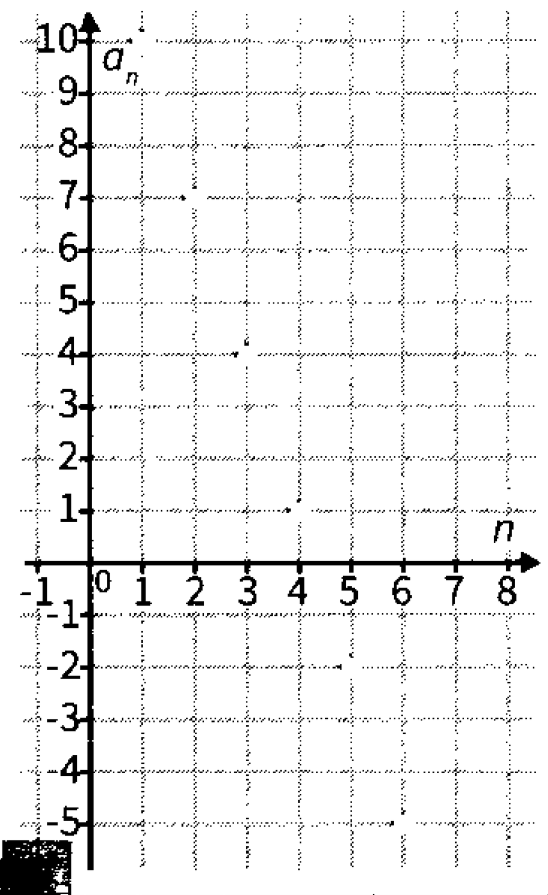


Figura 1.15

Graficaremos la sucesión 10, 7, 4, 1, –2, –5, …

Asociando cada posición con el número de dicha posición, tenemos los puntos (1, 10), (2, 7), (3, 4), (4, 1), (5, –2), (6, –5), …

Los localizamos en el plano cartesiano.

La gráfica muestra una línea recta, cuya ecuación está dada por la regla: $a_n = 10 + (n - 1)(-3)$, como se muestra en la Figura 1.15.

De manera general, la ecuación de una sucesión aritmética está dada por la expresión: $y = a_1 + (n - 1)d$.

Llamamos interpolación aritmética al proceso de encontrar elementos de la sucesión aritmética comprendidos entre dos elementos ya conocidos, para ello debemos conocer cuántos números más deseamos colocar entre ellos.

Si solo tenemos dos elementos de una sucesión, también es posible conocer los demás y graficarla.

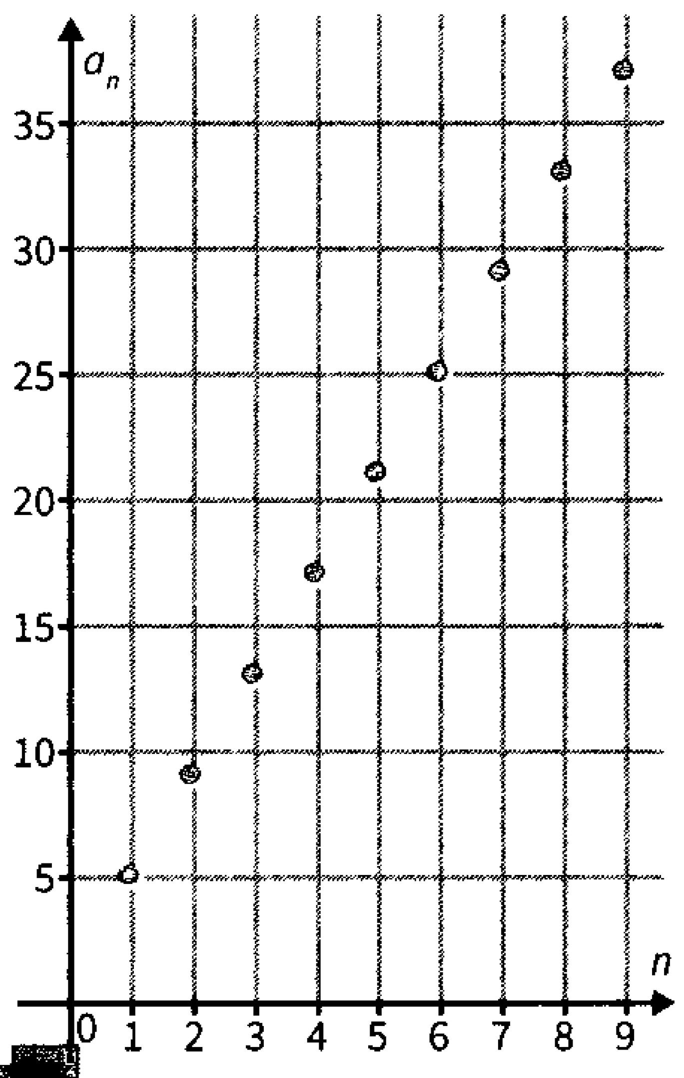


Figura 1.16

Ejemplo

Si solo tenemos $a_1 = 5$ y $a_9 = 37$ y deseamos encontrar los números que faltan de esta sucesión, como $a_9 = a_1 + 8d$, $8d = a_9 - a_1 = 37 - 5 = 32$, así, $d = 32/8 = 4$. Con lo que podemos completar la sucesión: 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, y su gráfica se puede visualizar en la Figura 1.16.

Para las sucesiones geométricas, el término n es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, tomamos a_n como la variable en el eje Y, es decir, la ordenada; y n será la abscisa, por lo tanto, $y = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Ejemplo

Graficaremos la sucesión 3, 6, 12, 24, 48, …

Tenemos los puntos (1, 3), (2, 6), (3, 12), (4, 24), (5, 48). Los localizamos en el plano cartesiano como en la Figura 1.17.

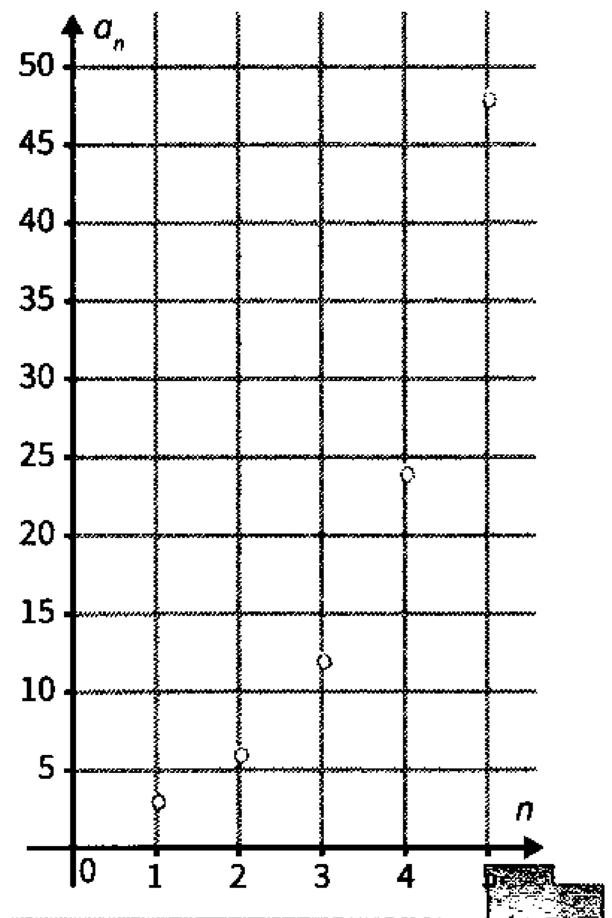


Figura 1.17

La gráfica de esta sucesión, a diferencia de la sucesión aritmética, es una línea curva. La ecuación de esta sucesión es $y = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Llamamos interpolación geométrica al proceso de encontrar números comprendidos entre dos números de la sucesión dados, todos los elementos formarán una sucesión geométrica.

Ejemplo

Encontraremos los cuatro términos restantes de la sucesión cuyos elementos uno y seis son $a_1 = 1$ y $a_6 = 243$.

Encontremos la razón:

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{143}{1} = r^5.$$

Por tanto, $r^5 = 243$, dando $r = 3$. La progresión es 1, 3, 9, 27, 81, 243, … Su gráfica se aprecia en la Figura 1.18.

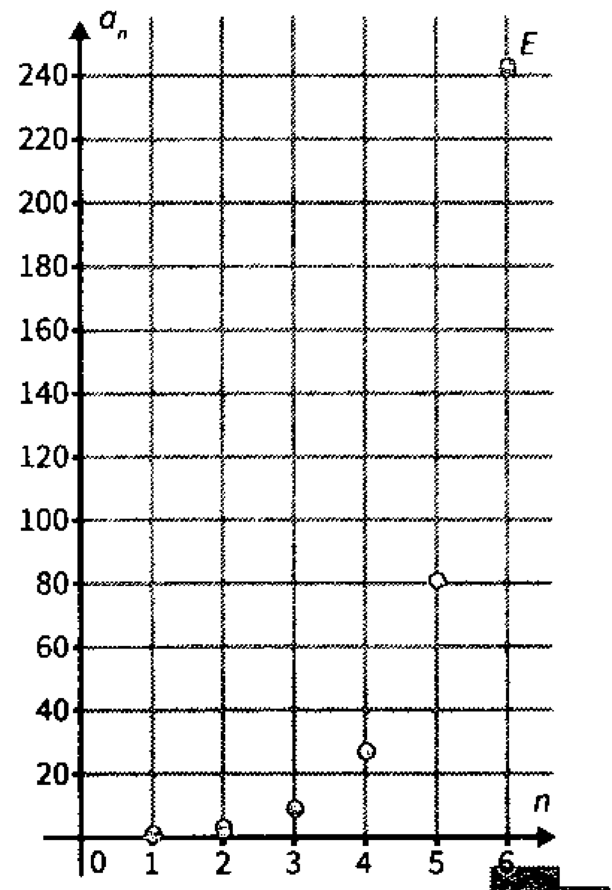


Figura 1.18

Dada una sucesión geométrica y r su razón, diremos que:

1. La sucesión es creciente si $r > 1$.
2. La sucesión es decreciente si su razón $1 > r > 0$.
3. La sucesión es oscilante si su razón r es un número negativo.

Ejemplos

1. La sucesión 3, 9, 27, 81, 243, … tiene razón $r = 3 > 1$. Entonces es creciente.
2. La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es decreciente, porque $r = \frac{1}{2}$.
3. La sucesión 1, −1, 1, −1,1, −1, …es oscilante, pues su razón es $r = -1$.

Actividad de aprendizaje

Resuelve las situaciones.

1. Calcula la suma de los términos de 1, ½, ¼, 1/8, 1/16, …
2. Pedro compró 20 videojuegos, por el primero pagó 1 dólar, por el segundo 2 dólares, el tercero le costó 4 dólares, así sucesivamente. ¿Cuánto pagó en total?
3. Identifica los tres primeros términos y la razón de la sucesión 90, −30, 10, −10/3, …

4. Calcula el término general de 1, 3, 9, 27, …
5. Encuentra el término general de 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, …
6. Ángela desea comprarse unos patines, ahorró la primera semana $5.00 y cada una de las siguientes semanas ahorró $5.00 más que la semana anterior. ¿Cuánto dinero ahorró al cabo de 20 semanas?
7. Encuentra el término general −13, −19, −25, −31, −37, −43, …
8. Grafica la sucesión −6, −2, 2, 6, 10, 14, …
9. Localiza la gráfica de la sucesión 7, 11, 15, 19, 23, 27, …
10. En una progresión, el primer término vale 3 y el sexto vale 8. Calcula la diferencia.
11. En una progresión geométrica, el primer término es 625 y el tercer término es 400. Calcula la razón.

Actividad de aprendizaje 11

Productos esperados

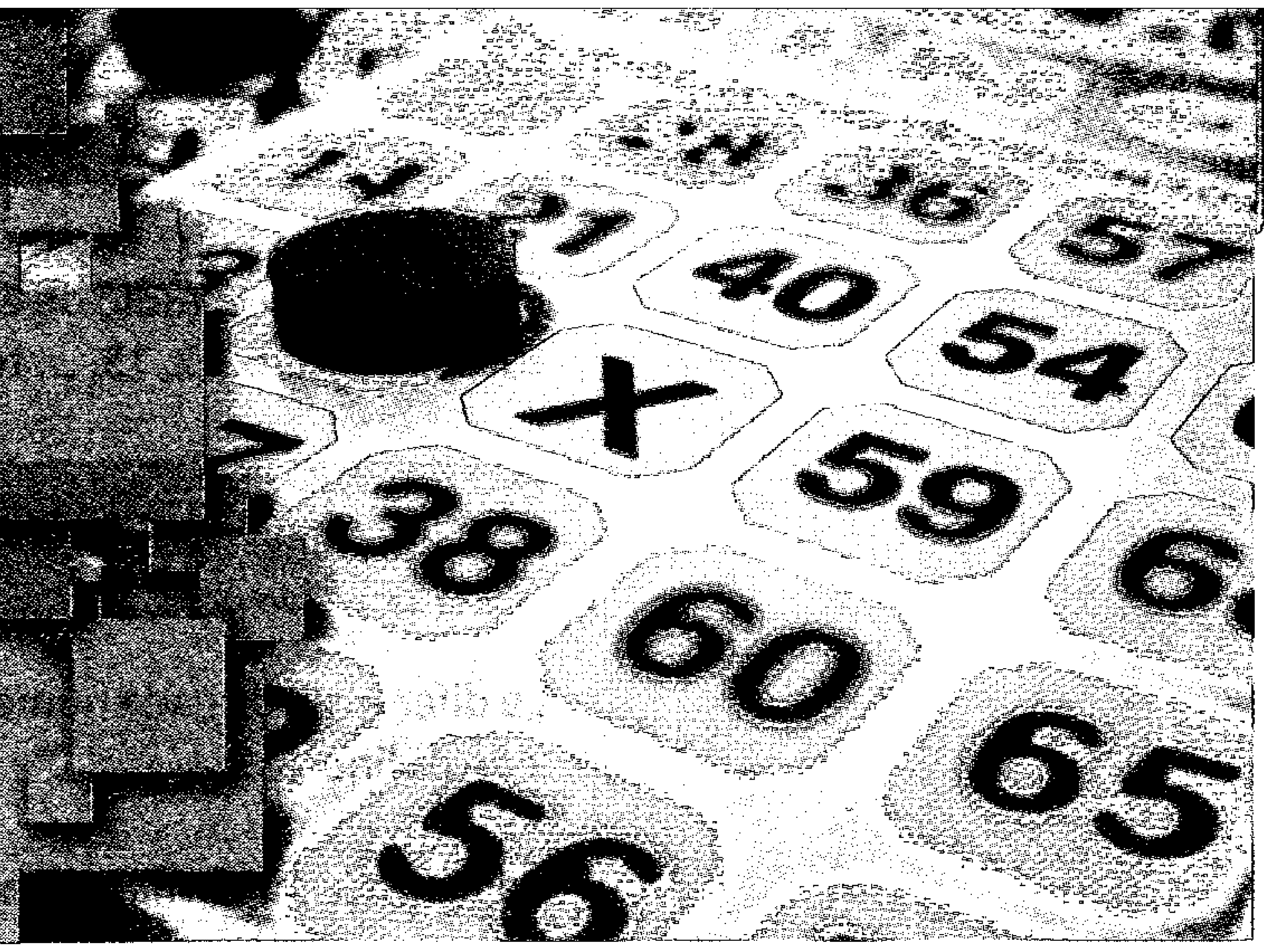
Completa la tabla con lo aprendido en esta sección y anéxala como evidencia.

Datos conocidos	Tipo de sucesión	Términos de la sucesión
$a_1 = -50, d = 2.5$		
	constante de valor 3	
		$2^5, 2^7, 2^9, 2^{11}, \ldots$
$a_1 = -0.5, r = -2$		
$a_3 = 4, a_4 = 12$		

Realiza la actividad y guarda tu trabajo como evidencia de aprendizaje.

Este proyecto consiste en la elaboración de una sucesión de tu creación.

1. Recuerda las características y los tipos de sucesiones. ¿Qué sucesión has pensado? Será necesario recordar las reglas y las propiedades de cada sucesión antes vista.
2. Después de determinar tu sucesión, registra su término general. ¿Fue difícil determinarlo? ¿De qué te valiste para que tu sucesión no sea compleja?
3. Diseña una maqueta para representar tu sucesión. Deberás exponerla ante el grupo.
4. ¿Qué sucesiones de famosos matemáticos conoces?
5. Investiga y elabora un mapa conceptual acerca de los temas vistos.



Sucesiones y series numéricas

Lo lineal: razón de cambio

El comportamiento lineal de un elemento hace más fácil su estudio. Este comportamiento se expresa por medio de una función lineal tipo f(x) = $mx + b$, ya sabes que esta es la ecuación de la recta representada con la pendiente y su ordenada en el origen.Una razón es la relación de dos cantidades para expresar cuánto de una pertenece a la otra. Esto se hace mediante un cociente.

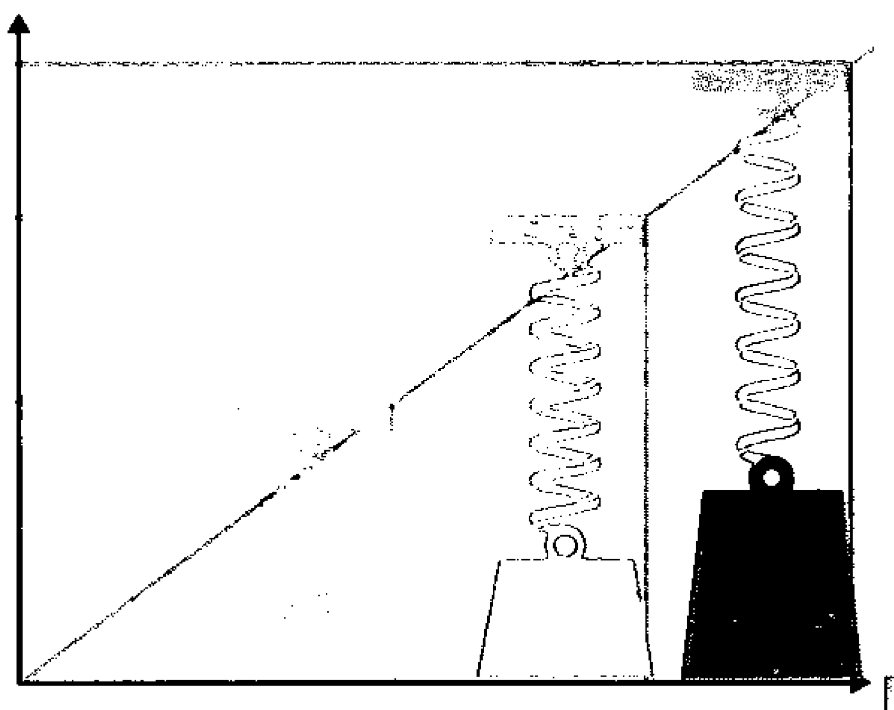


Figura 1.19

Un ejemplo de este comportamiento es la ecuación de la ley de Hooke: $f = -kx$. Donde f representa la fuerza que se aplica para deformar un resorte y que a su vez está en función de la constante de elasticidad k del resorte y de la deformación lineal x (Figuras 1.19 Y 1.20). La gráfica de la Ley de Hooke es una recta, donde la constante es el valor de la pendiente.Las funciones lineales tienen la forma $f(x) = mx + b$. Donde $m = \frac{y_x - y_1}{x_2 - x_1}$ es la razón de cambio. Al graficar una función lineal siempre obtendremos una línea recta. Cuando b vale cero, entonces la gráfica pasa por el origen de coordenadas y la función recibe el nombre de función de proporcionalidad directa, ya que las variaciones directas pueden ser expresadas como $y = mx$.

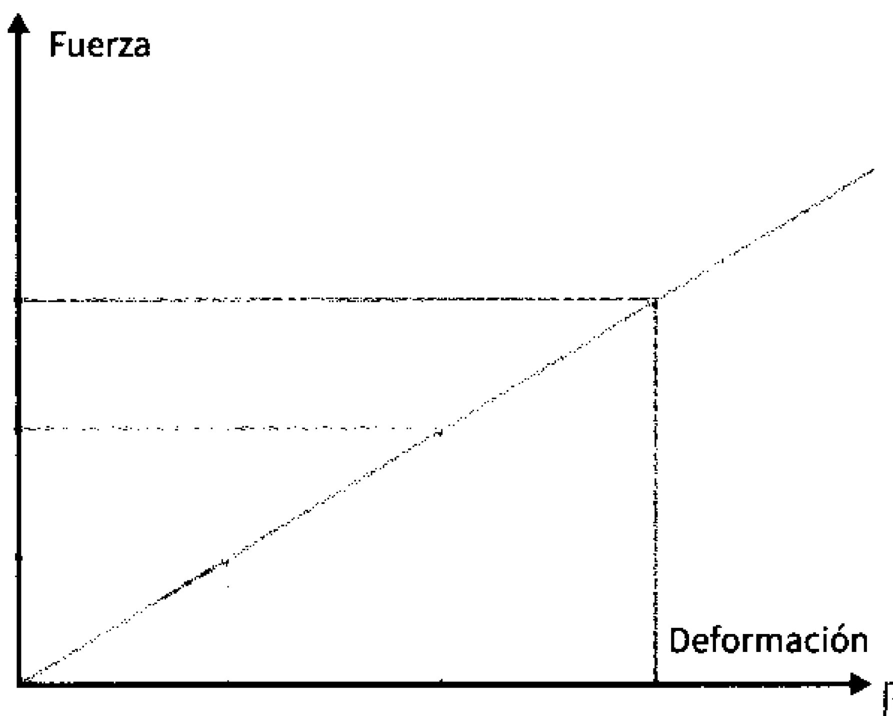


Figura 1.20

Existen sucesiones cuyo comportamiento es lineal, ¿qué características deben tener?, ¿existirá alguna regla general para las sucesiones de ese tipo?

Actividad de aprendizaje 12

- **En equipos de cuatro integrantes investiguen sobre el uso de las sucesiones en la vida diaria.**

Consulten el trabajo del famoso matemático Fibonacci y su sucesión. Leonardo de Pisa (1170-1240), más conocido como Fibonacci, famoso matemático italiano, creó su sucesión acerca de la reproducción de conejos . Deberán exponer su investigación a toda la clase poniendo énfasis en la razón de cambio.

Para inducir el estudio de este tipo de sucesiones comenzaremos con la siguiente: De la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, … tenemos que:

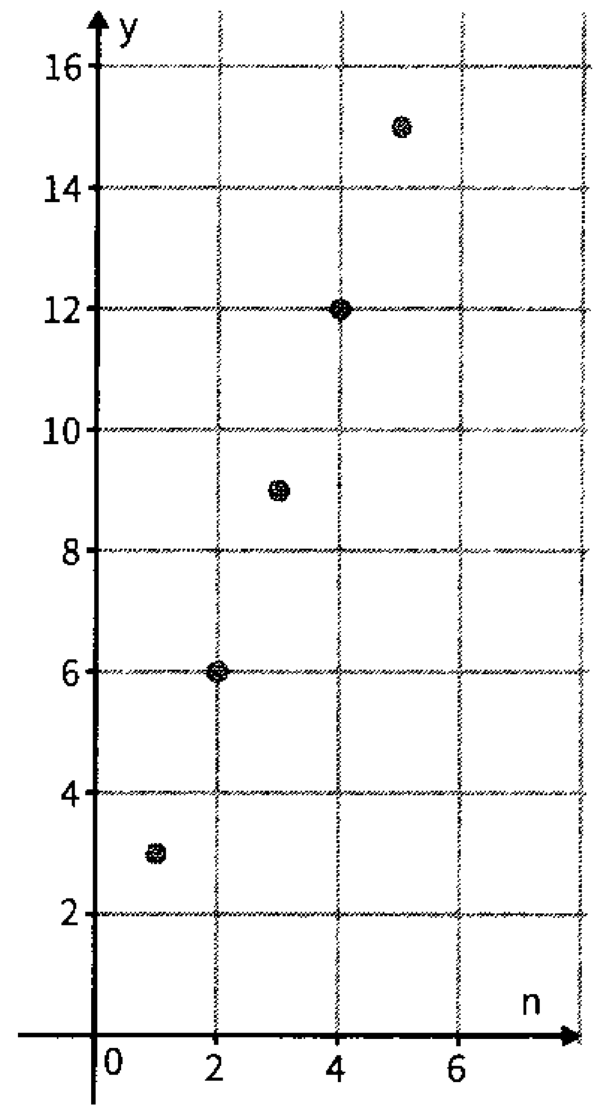
Término (n)	1	2	3	4	5
Sucesión (a_n)	3	6	9	12	15

La diferencia de cada número con su antecesor es $d = 3$, por tanto, decimos que la sucesión es lineal.

Calculando su término general, tenemos que $a_n = 3n$. Para graficar su comportamiento, hacemos cambios de variable, obteniendo $y = 3n$, elegimos valores para n obteniendo la tabla y la gráfica:

TIC

Para saber cómo graficar funciones lineales, puedes consultar este video:
bkmrt.com/g421VU



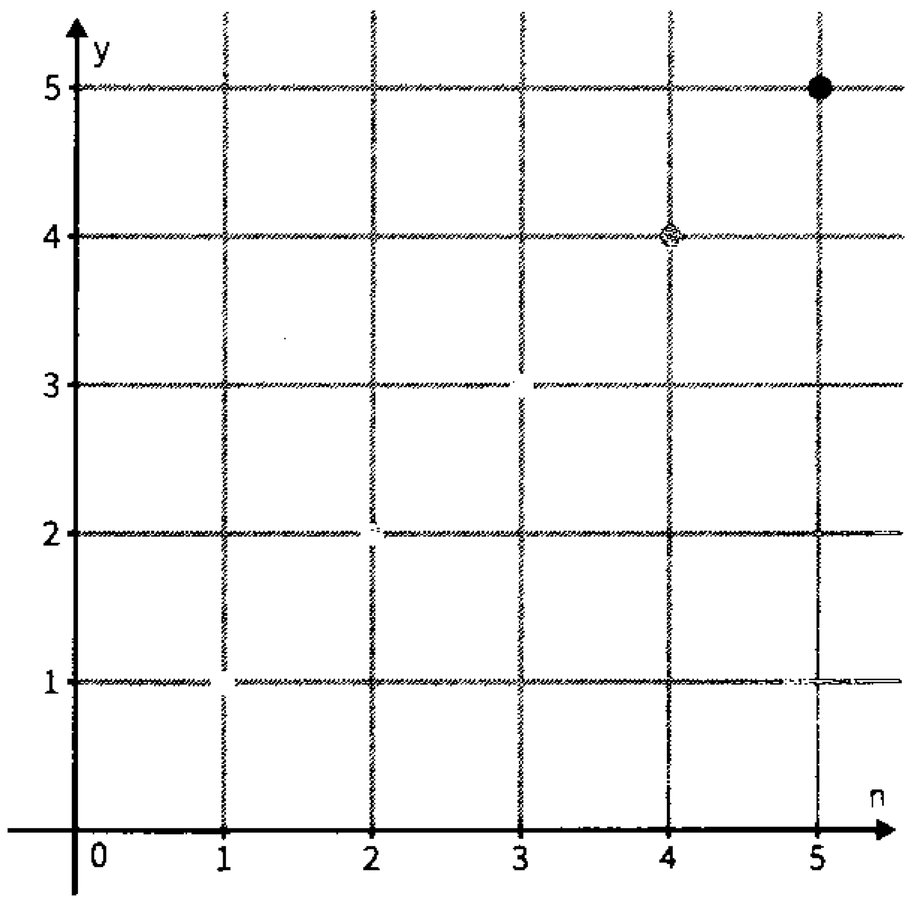
n	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

La razón de cambio (de una variable respecto a otra) será la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra. Por tanto, una variable depende de la otra.

En el caso de las sucesiones aritméticas, la razón de cambio de un miembro y otro es la suma o resta de la misma razón. Y como ya habrás notado, esta es constante.

Ejemplos

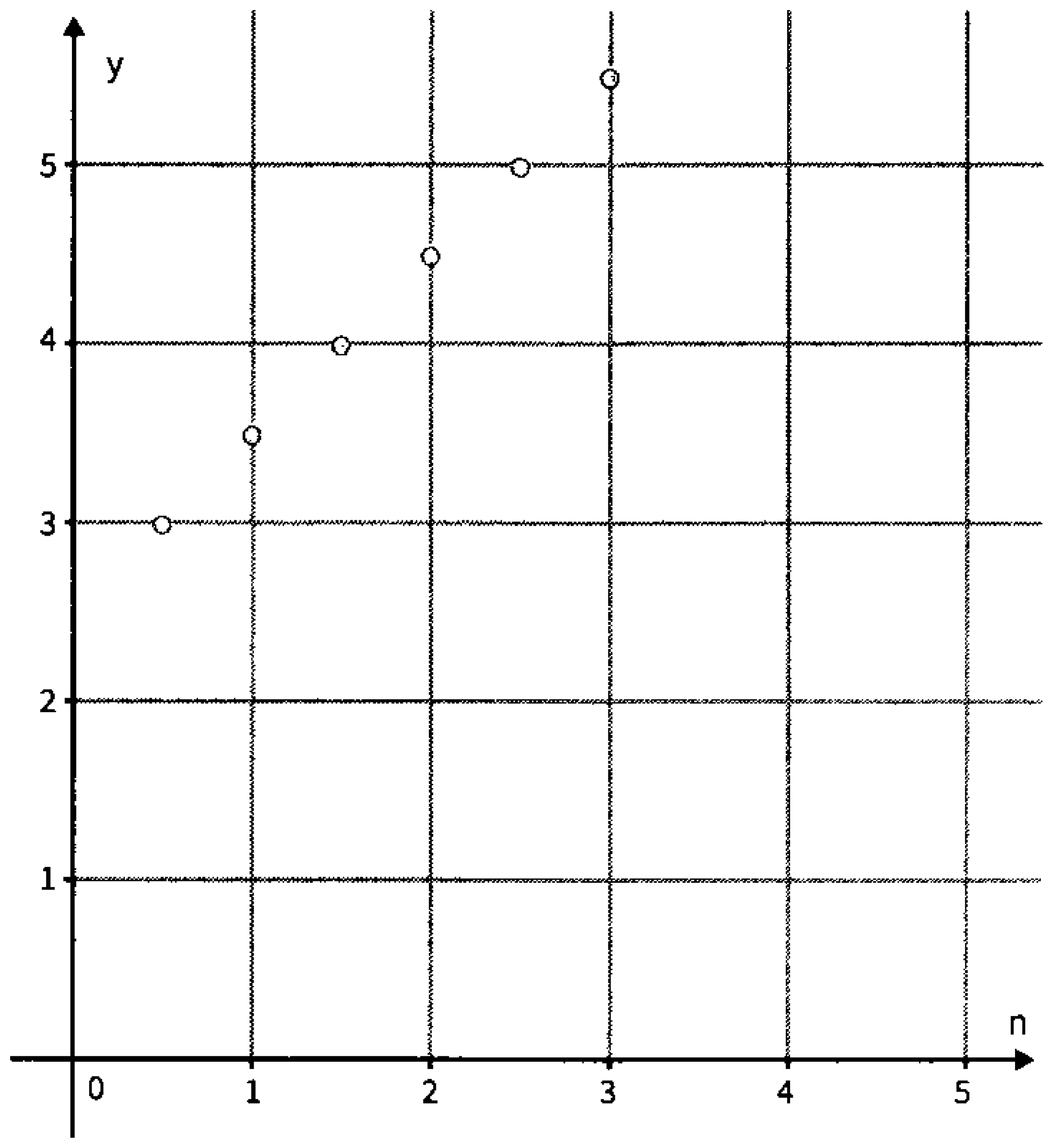
- Sucesión aritmética $y = n$, es decir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …



n	y
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

1. Sucesión aritmética $y = n + 5$, es decir, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

n	y
1	6
2	7
3	8
4	9
5	10



Lo no lineal: sucesiones cuadráticas

Decimos que una sucesión es cuadrática si al calcular por primera vez las diferencias entre elementos consecutivos, esta no es igual para todas las parejas, sino hasta la segunda vez que lo hacemos, d se vuelve constante. Una característica que define este tipo de sucesiones es que el término general tendrá un exponente al cuadrado.

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22...

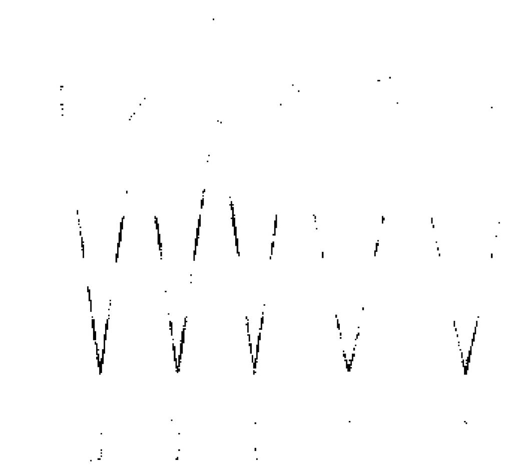


Figura 1.21

Diferencias sucesivas de términos.

¡Esto siempre sucede con las sucesiones cuadráticas!

TIC

Para reforzar el conocimiento de las sucesiones cuadráticas te recomendamos el siguiente video:

bkmrt.com/93VPMe

Ejemplo

Dado el término general $a_n = n^2 + 3$ de una sucesión, calcularemos sus primeros cinco elementos.

Para el primer elemento $n = 1$, para el segundo $n = 2$, para el tercero $n = 3$, etcétera. Así:

$a_1 = (1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_2 = (2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = (3)^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

$a_4 = (4)^2 + 3 = 16 + 3 = 19$

$a_5 = (5)^2 + 3 = 25 + 3 = 28$

Para encontrar la regla general, nos ayudaremos de la fórmula $an^2 + bn + c$, donde n representa la posición del elemento en nuestra sucesión.

Segundo parcial

Eje: Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico

Componentes	Contenidos centrales	Contenidos específicos
• Patrones, simbolización y generalización: elementos del álgebra básica.	• Variación lineal como introducción a la relación funcional. • Variación proporcional. • Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático). • El trabajo simbólico.	• Sobre el uso de tasas, razones proporciones y variación proporcional directa como caso particular de la función lineal entre dos variables: ¿qué magnitudes se relacionan?, ¿cómo es el comportamiento de dicha relación? • La proporcionalidad y sus propiedades numéricas, geométricas y su representación algebraica. Se sugiere tratar con situaciones cotidianas antropométricas y de mezclas (colores y sabores): ¿qué es lo que se mantiene constante en una relación proporcional? • Resolución de ecuaciones lineales en contextos diversos: ¿qué caracteriza a la solución?

Aprendizajes esperados

- Expresa, de forma coloquial y escrita, fenómenos de proporcionalidad directa de su vida cotidiana con base en prácticas como: comparar, equivaler, medir, construir unidades de medida, entre otras.
- Caracteriza una relación proporcional directa.
- Resignifica en contexto al algoritmo de la regla de tres simple.
- Expresa, de manera simbólica, fenómenos de naturaleza proporcional en el marco de su vida cotidiana.

Productos esperados

- Explicar el algoritmo de la regla de tres con más de un argumento.
- Construir unidades de medida a partir de establecer una relación específica entre magnitudes.

Para reflexionar...

¿Sabes para qué eres bueno?

¿Te han dicho que eres bueno para hacer algo, pero en realidad eso no te gusta?

Cuando te preguntan qué vas a estudiar, ¿no sabes qué contestar?

Para terminar...

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

La elección vocacional es importante y muchas veces complicada. En la actualidad existe una gran cantidad de opciones de carrera y áreas de trabajo; tantas, que cada vez es más complicado elegir una.

Esta elección se hace más complicada cuando no nos conocemos o no nos sentimos capaces de hacer algo. Es por ello, que recursos como éste nos permiten conocernos mejor, para elegir caminos que nos ayuden a construir nuestro presente y futuro.

Mi vocación

Conocer mi perfil vocacional.

Lleva a cabo las siguientes actividades.

1. Desde una computadora, ingresa al test vocacional para ingresar a la educación superior de la página "Decide tus estudios":

   http://www.decidetusestudios.sep.gob.mx/vista/test-vocacional/

2. Con sinceridad, contesta las dos pruebas que se presentan en dicha página. Con base en las cualidades y gustos que mencionas, obtendrás los resultados que mostrarán tu perfil vocacional.
3. En tu reporte de resultados vendrá una lista de carreras profesionales asociadas a tu perfil; con el cursor ingresa a cada una de ellas e investiga de qué se tratan y si coinciden con tus intereses.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollarás tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti, tomes decisiones para marcar la dirección de tu futuro y reflexiones acerca de las implicaciones que tiene en tu vida llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

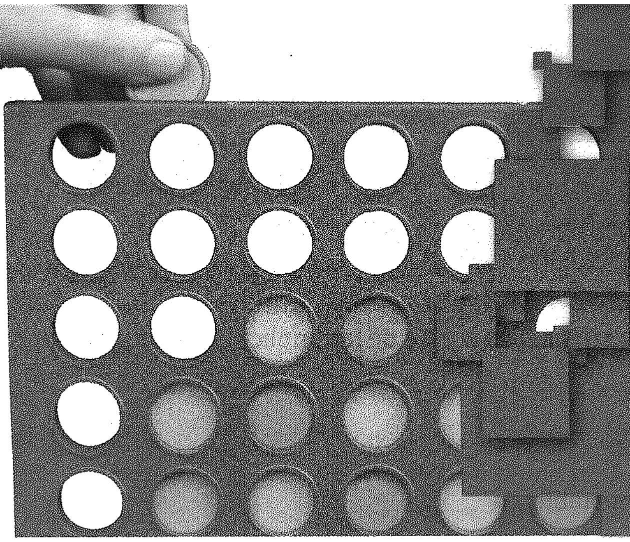
1. Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo realizar	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Una vez que organizaste la información en la tabla, léela con atención para que tengas un panorama de qué implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico donde incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para que las tengas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza este esquema para elaborar un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ____

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Variación lineal como introducción a la relación funcional

Casos particulares de la función lineal

Tasas

Si quieres saber, por ejemplo, la cantidad de personas que son vegetarianas con respecto a las que prefieren comer carne, la tasa te ayuda a averiguar ese dato. Con la tasa relacionamos qué tanto cambian dos variables entre sí, una variable será dependiente de la otra.

La tasa, las proporciones y los porcentajes se usan en el comercio y, las ciencias, como medicina, biología, etcétera. Si consideramos que el cambio de la variable y se da de y_1 a y_2 y si la variable x varía desde x_1 a x_2, la tasa de cambio de y con respecto a x es:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Así, tenemos estas propiedades para y:

- Si $y_2 - y_1 > 0$ implica que y creció.
- Si $y_2 - y_1 < 0$ implica que y decreció.

Análogamente para la variable x:

- Si $x_2 - x_1 > 0$ implica que x creció.
- Si $x_2 - x_1 < 0$ implica que x decreció.

La tasa de cambio se expresa también así: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, siendo la tasa de cambio promedio de y con respecto a x.

Hay diversos ejemplos de tasas: la tasa de interés en plazo determinado, la tasa de natalidad, de desempleo, entre otras.

Es importante considerar que si una de las variables es el tiempo, la tasa se llama tasa de cambio, por ejemplo, la tasa de: mortalidad, fecundación, crecimiento, etcétera.

Ejemplo

Calcularemos la tasa de cambio de la función $f(x) = x^2 + 2$ en los intervalos [−2, 0] y [0, 2], observa la Figura 2.1.

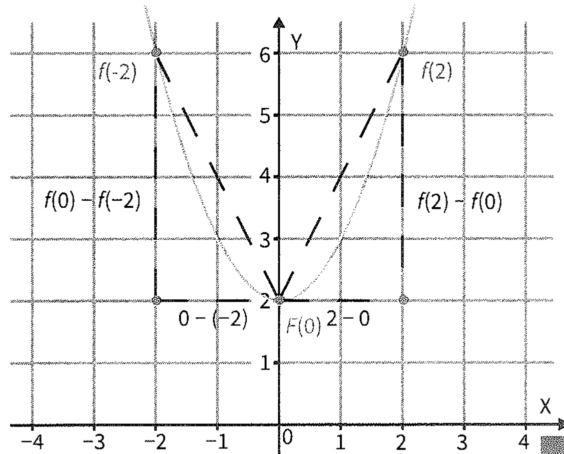


Figura 2.1

Aplicando la fórmula en el intervalo [−2, 0] tenemos :

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{2-6}{2}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Mientras que en el intervalo [0, 2] obtenemos:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Como ves, ambas tasas son valores opuestos, la tasa en [−2, 0] es negativa y corresponde a un intervalo donde la función decrece, y la tasa en [0, 2] es positiva y corresponde a un intervalo donde la función crece.

Ejemplo

Consideremos la situación: Para 1990, un granjero aumentaba su población de gallinas con una tasa de 150 gallinas por año. Si en 1998, su población era de 6 000 gallinas, hallaremos la población que había en 1995.

Los datos son $x_1 = 1993$, $x_2 = 1998$, la tasa $\frac{\Delta y}{\Delta x}=150$ gallinas/año y $y_2 = 6000$. Aplicando la fórmula de la tasa $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, tenemos:

$150=\frac{6000-y_1}{1998-1995}$, es decir, $150=\frac{6000-y_1}{3}$, de donde $150\cdot 3=6000-y_1$, así $450+y_1=6000$.

Resultando $y_1=6000-450=5550$. Esto significa que en 1995 había 5 550 gallinas en su granja.

Ejemplo

En la tabla se indica el crecimiento poblacional de cierta localidad mostrando el número de habitantes $N(t)$ de un pueblo en los primeros t años:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N(t)	20	80	140	220	230	245	247	250	250	250

a. ¿Cuál es el total de personas en el tercer año?

140 personas.

b. ¿Cuál es el número total de personas en el noveno año?

250 personas.

Encontraremos la variación poblacional desde el año dos hasta el año nueve.

La tabla muestra que en el año $x_1 = 2$, el número de personas es $y_1 = 80$. Para $x_2 = 9$, el número de personas es $y_2 = 250$.

El cambio está dado por $\Delta y = y_2 - y_1 = 250 - 80 = 170$ personas. Como el valor resultó positivo, la población se incrementó en 170 personas durante $\Delta x = x_2 - x_1 = 9 - 2 = 7$ años.

c. Ahora determinaremos la tasa promedio de las personas para los años dos a nueve.

La tasa promedio del crecimiento de población respecto al tiempo es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{170}{7} \approx 24.28 \text{ personas/año.}$$

La noción de razón es erróneamente relacionada con el concepto de fracción, pero no siempre lo está. Las fracciones son cualquier par ordenado de números enteros cuyo segundo componente (denominador) es distinto de cero, mientras que la razón la definiremos como la comparación de dos magnitudes, es decir, de números reales. Tengamos en cuenta algunas consideraciones:

- Las razones se pueden asignar mediante símbolos distintos, por ejemplo, la razón 3 a 5 puede verse como $3:5$ o $3 \rightarrow 5$.
- Las razones comparan entre sí objetos con unidades diferentes, por ejemplo, 150 kilómetros por 3 horas. Mientras que las fracciones, se usan para comparar el mismo tipo de objetos: tres de cuatro partes, que indica $\frac{3}{4}$.
- Las razones pueden expresarse de manera distinta que la notación fraccional, es decir, no es necesario el uso de la notación de fracción para saber que existe una razón, por ejemplo, 50 litros por metro cuadrado.
- De manera general, las operaciones en las razones no se efectúan de igual manera que las fracciones, por ejemplo: deseas ponchar globos para ganar el juego, en los primeros cinco intentos ponchas tres globos (5 : 3), en los próximos dos intentos ponchas cinco globos, (2 : 5) entonces se combinan para producir siete globos ponchados en ocho intentos, es decir, $5:3 + 2:5 = 7:8$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero, sin embargo, esto no quiere decir que tengamos que dividir entre cero, por ejemplo, en una caja, la razón de caramelos azules a rojos puede ser 5 : 8, y también puede ser 8 : 0, es decir, que en la caja sólo hay caramelos azules.

Definimos **razón** como la relación entre cantidades que expresa cuánto de una pertenece a la otra.

La notación que usaremos para expresar esta relación es $a : b$ y se lee a es a b.

Ejemplo

Si en una bolsa de dulces hay 30 caramelos y 24 paletas, la razón de caramelos a paletas es de 30 a 24, y se escribe 30 : 24.

Si deseamos saber la cantidad de caramelos que hay por cada paleta en la bolsa, esto implica de manera implícita la operación de división:

$$30:24=\frac{30}{24}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot4}=\frac{5}{4}.$$

Es decir, que en la bolsa hay cinco caramelos por cada cuatro paletas. Por lo tanto, la razón es 5 : 4.

Para valores con decimales se multiplica hasta obtener valores enteros.

Ejemplo

$3.5 : 2$ es igual que $3.5 \cdot 2 : 2 \cdot 2$, es decir, $7 : 4$.

Con las razones podemos expresar diversidad de relaciones.

Ejemplo

Encontraremos la razón de la anchura y la longitud de una televisión de plasma, cuyas medidas son 90 cm de anchura por 2 m de longitud.

Hagamos la conversión para trabajar con las mismas unidades. La longitud es de 2 m, así:

$$2\cancel{m}\cdot\frac{100\text{ cm}}{1\cancel{m}}=200\text{ cm}.$$

Por lo tanto, la razón de anchura a longitud en la televisión es 90 : 200, simplificando tenemos: $\frac{90}{200}=\frac{9}{20}$. Es decir, 9 : 20, 9 cm de anchura por cada 20 cm de longitud.

Proporciones

Una proporción es la igualdad entre dos razones.

Se escribe como $a : b :: c : d$ o bien como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y se lee "a es a b como c es a d".

Llamemos k a la constante de proporcionalidad, el resultado de la división de las razones, que será el mismo para cada una de ellas.

Las proporciones siempre cumplen el Teorema fundamental de las proporciones (TFP).

Dada una proporción tenemos que el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=c\cdot b\ .$$

De manera recíproca, dos productos iguales pueden escribirse como una proporción:

$$a\cdot d=c\cdot b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Figura 2.2
Teorema fundamental de las proporciones.

Ejemplos

1. $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}\Rightarrow 2\cdot 16=8\cdot 4$ 2. $\frac{3}{5}=\frac{5}{25}\Rightarrow 3\cdot 25=5\cdot 15$ 3. $\frac{6}{2}=\frac{90}{30}\Rightarrow 6\cdot 30=90\cdot 2$

Dada la proporción $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ se pueden formar ocho proporciones:

$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$	$\frac{20}{5}=\frac{12}{3}$	$\frac{3}{12}=\frac{5}{20}$	$\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$	$\frac{5}{20}=\frac{3}{12}$	$\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$	

4. Josué desea hacer una ampliación de su rostro en una fotografía que mide 5 cm de altura por 2.5 cm de ancho. Si Josué desea que su rostro sea de tamaño real, es decir 18 cm de altura, daremos la anchura necesaria para evitar distorsiones.

En una fotografía, las dimensiones son proporcionales a la persona, por tanto, la razón de altura-anchura debe ser igual. La razón es 5 · 2 = 2.5 · 2, en enteros 10 : 5 y la razón de dimensión real es 18 : x, tenemos 10 : 5 :: 18 : x, es decir:

$\frac{10}{5}=\frac{18}{x}$, aplicando el TFP: $10x = 18 \cdot 5$, luego dividimos entre 5 a ambos lados de la igualdad: $\frac{2\cdot\cancel{5}x}{\cancel{5}}=\frac{18\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}$, obteniendo $2x = 18$, es decir $x = 9$. Por lo tanto, Josué deberá ampliar su fotografía a 9 cm de ancho.

5. Procederemos a encontrar las medidas de una cancha de futbol, sabiendo que su perímetro mide 433 metros y si la razón entre el ancho y el largo es 5 : 8.

El perímetro de la cancha mide 433 metros, así, $2a + 2l = 433$ y la razón entre el ancho y el largo es 5 : 8, por tanto, $\frac{a}{5}=\frac{l}{8}$. Aplicando el TFP obtenemos $a \cdot 8 = 5 \cdot l$, entonces $a=\frac{5}{8}\cdot l$. Remplazando en la expresión del perímetro:

$2(\frac{5}{8}\cdot l)+2l=433$. Multiplicamos ambos lados por cuatro, resultando: $5l + 8l = 1732$, de donde $13l = 1732$. Efectuando la división entre 13, $l\approx 133.23$.

Ahora sustituyendo el valor de l en $a=\frac{5}{8}\cdot l$ tenemos: $a=\frac{5}{8}\cdot l=\frac{5}{8}(133.23)\approx 83.27$.

La cancha mide 83.27 m de ancho y 133.23 m de largo aproximadamente.

En un salón de clases, la razón entre la cantidad de hombres y de mujeres es 3 : 2. Si hay 27 hombres, determinaremos la cantidad de estudiantes en el salón.

Representemos con m a las mujeres y con h hombres, la razón entre hombres y mujeres es 3 : 2, es decir $h : 3 :: m : 2$. Si hay 27 hombres, entonces $27 : 3 :: m : 2$ o bien $\frac{27}{3}=\frac{m}{2}$, aplicando el TFP tenemos $27 \cdot 2 = m \cdot 3$, quedando $\frac{54}{3}=m$, así $m = 18$.

Hay 45 estudiantes en total, de los cuales 18 son mujeres y 27 hombres.

Variación proporcional directa

Diremos que la variable y es directamente proporcional a la variable x si $y = k \cdot x$, donde k es una constante y la llamaremos constante de proporcionalidad directa.

Ejemplos

1. Analizaremos la fórmula para obtener la circunferencia de un círculo $C = 2r \cdot \pi$.

   Sabemos que la longitud de una circunferencia C es directamente proporcional al radio de la misma, donde 2π es la constante de proporcionalidad.

   Observa que de la fórmula $y = k \cdot x$ obtenemos $k=\frac{y}{x}$. Tomemos en cuenta que si una de las variables incrementa en cierta proporción, la otra también incrementa en la misma proporción, o por el contrario, si una de las variables decrece en cierta proporción, la otra también decrece en la misma proporción.

2. Consideremos y directamente proporcional a x, además $y = 6$ cuando $x = 3$, encontraremos el valor de y cuando $x = 9$.

   Por definición, tenemos $y = k \cdot x$. Si sustituimos $y = 6$ y $x = 3$ y calculamos el valor de la constante: $6 = k \cdot 3$, entonces $k=\frac{6}{3}=2$. Por lo tanto, $y = 2 \cdot x$, sustituimos el nuevo valor para $x = 9$, obteniendo $y = 2 \cdot 9 = 18$, entonces $y = 18$ es directamente proporcional a $x = 9$.

3. Luisa desea abastecer su tienda y compra cuatro herramientas a un costo de \$1 450, hallaremos el costo de 20 herramientas iguales a las anteriores.

   Estas cantidades están relacionadas de manera proporcional porque entre más herramientas, será mayor la cantidad de pesos a pagar.

   Llamemos H a la cantidad de herramientas y P a la cantidad de dinero en pesos. Por lo tanto, $P = k \cdot H$, sustituyendo los valores de H y P y despejando k obtenemos:

$$k=\frac{P}{H}=\frac{\$1450}{4 \text{ herramienta}}=\frac{\$362.5}{\text{herramienta}}.$$

   Poniendo $H = 20$, resulta: $P=\frac{\$362.5}{\text{herramienta}}H=\frac{\$362.5}{\cancel{\text{herramienta}}}(20\ \cancel{\text{herramienta}})=\$7250$.

Para saber más

Las proporciones directas. Se caracterizan porque al aumentar una variable, la otra también aumenta.

Las proporciones inversas se caracterizan porque al disminuir una variable, la otra aumenta.

Tres hermanos desean invertir en un negocio, sin embargo tienen distintos capitales, uno de ellos invierte \$4 000; otro invierte \$4 578 y el último sólo \$3 855.

Los hermanos deciden que las utilidades serán repartidas en forma directamente proporcional al capital invertido.

¿Cuánto recibirá cada uno si la utilidad generada en el negocio al primer año de trabajo es de \$90 000?

Consideremos las variables x, y, z, donde:

x = la cantidad de dinero que le toca al primer hermano.

y = la cantidad de dinero que le toca al segundo hermano.

z = la cantidad de dinero que le toca al tercer hermano.

La utilidad generada en el primer año de trabajo está representada por:

$x + y + z = 90\,000$ (1)

Como es repartida proporcionalmente, les corresponde:

Al primer hermano $x = 4\,000k$ (2)

Al segundo hermano $y = 4\,578k$ (3)

Al tercer hermano $z = 3\,855k$ (4)

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) , en (1) y despejando k:

$4000k + 4578k + 3855k = 90000$, entonces $12433k = 90000$, así $k = \frac{90000}{12433} \approx 7.239$.

Por lo tanto:

El primer hermano recibe $4000k \approx 4000(7.239) \approx 28956$.

El segundo hermano recibe $4578k \approx 4578(7.239) \approx 33140$, mientras que:

El tercer hermano recibe $3855k \approx 3855(7.239) \approx 27904$.

Es importante mencionar que x y y son directamente proporcionales si la razón entre ellas es constante cuando x es distinto de cero, es decir, $\frac{y}{x} = k$ donde k es la constante de proporcionalidad.

Como vimos en el primer parcial, esta relación representa una recta que tiene razón de cambio constante, ahora sabemos que coincide con la constante de proporcionalidad.

Ejemplos

1. Si tres metros de cierta tela para tapizar cuestan \$600, responderemos, ¿cuánto cuestan diez metros de la misma tela?

   Tenemos $\frac{3}{10}=\frac{600}{x}$, despejando as $x=\frac{6000}{3}=2000$, diez metros de la misma tela para tapizar cuestan \$2 000.

2. Si cinco trabajadores cavan el hoyo de una cisterna de 8 m de profundidad, ¿cuántos metros cavarán 10 obreros trabajando bajo las mismas condiciones?

   Los datos son: $\frac{5}{10}=\frac{8}{x}$, despejando el valor de x obtenemos $x=\frac{80}{5}$, esto es $x = 16$. Por tanto 10 obreros cavarán 16 metros de profundidad.

Actividad de aprendizaje 1

Realiza lo que se indica.

1. En la Figura 2.3 se encuentra un tangram. En binas construyan un tangram en cartulina, de tal manera que cada lado tenga una longitud de 8 cm.
   a. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
   b. ¿Qué razón tienen sus áreas?
   c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de los perímetros?

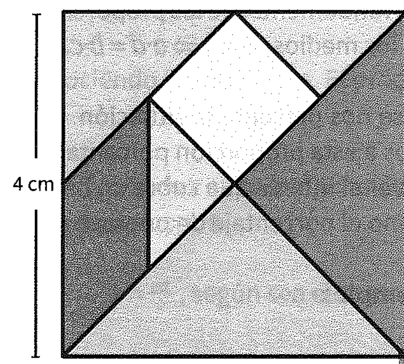
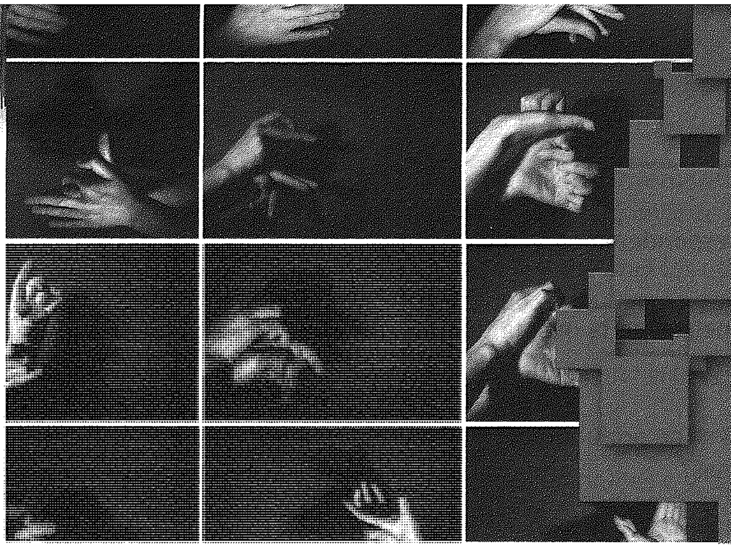


Figura 2.3

2. Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están a razón de 4 : 15 : 17. ¿Cuánto mide cada ángulo?
3. Tres obreros realizan un trabajo cobrando \$5 730.00. ¿Cuánto le corresponde a cada uno? Tomando en cuenta que uno de ellos trabajó 12 días; otro, 18 días y el último, 15 días.
4. La razón entre mujeres y hombres en un salón es de 2 a 3. Hay 12 mujeres, ¿cuántos hombres hay?
5. Utiliza el teorema fundamental de las proporciones para formar proporciones a partir de las igualdades dadas:
   a. $40 \cdot 6 = 24 \cdot 10$
   b. $m \cdot n = p \cdot q$
   c. $r^2 = a \cdot b$
6. Un mecánico y su ayudante reciben \$270 000 por ajustes de motor de tres autos, ambos deciden repartir en razón 7 : 2. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?
7. Si Penélope trabaja tres horas a contraturno y obtuvo una remuneración de \$8 100 a esa razón, ¿en cuánto tiempo ganará \$27 000?



Variación proporcional

La proporcionalidad

Propiedades numéricas

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas. Recordemos que el teorema fundamental de las proporciones nos dice que el producto de los extremos es igual al producto de los medios: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a{\cdot}d=b{\cdot}c$.

Si se nos presenta la situación $\frac{a}{b}=\frac{c}{100}$. Es decir, que el extremo d de la proporción es 100, llamamos a esta proporción porcentaje. El término porcentaje es usado comúnmente en finanzas, para saber el interés que cobra un banco o que se genera de una tarjeta de crédito, realizar un estudio como el porcentaje de pobreza en el país, etcétera. Se usa el símbolo % para representarlo.

Ejemplos

1. Isabel desea un préstamo de $5 500 y necesita saber qué intereses pagará al cumplirse los tres años que supone tardará en pagar la deuda si el banco tiene una tasa anual fija de 30 %.

   La fórmula que nos permite calcular el interés es: $I = C \cdot r \cdot t$, donde I representa el interés, C el capital, r la tasa y t el tiempo.

   De nuestro problema tenemos que C = 5 500++4; r = 30 % y t = 3 años, sustituyendo en la fórmula obtenemos:

   $I = 5\,500 \cdot (30 / 100) \cdot 3$, quedando $I = 5\,500 \cdot 0.30 \cdot 3 = 4\,950$. Concluimos que Isabel adquirirá una deuda de $5 500 + $4 950 = $10 450.

2. Imagina que vas a la tienda y ves una computadora que cuesta $18 000, además tiene descuento de 15 %. Encontraremos los montos del descuento y el precio con descuento.

   El descuento se obtiene con $d = 18\,000 \cdot 0.15 = 2\,700$.

   El precio de oferta es $18 000 – $2 700 = $15 300.

Regla de tres

En tus clases de matemáticas, seguro has escuchado decir a tu profesor "aquí sólo aplica la regla de tres". El origen de esta regla se dio en China con el siguiente problema:

> "Dos picul y medio (una medida de peso transportada por un hombre sobre sus espaldas, aproximadamente 65 kg) de arroz se compran por un taiel de plata. ¿Cuántos picul de arroz se pueden comprar con 9 taiel?"

Fue estudiada por los árabes, dando origen a la obra *Sobre la regla de tres en la India* de Al-Biruni.

Es común que escuches acerca de ella e incluso ya la habrás aplicado. La regla de tres consiste en calcular una cantidad a partir de tres cantidades conocidas que varían proporcionalmente, la variación puede ser directa o inversa.

Regla de tres simple directa

En estos problemas debemos hallar un cuarto proporcional conociendo los otros tres. El procedimiento consiste en:

Escribir la hipótesis: si a es a b, luego preguntar: ¿c es a x o x es a d?, donde x es la incógnita. Finalmente despejar la incógnita de la expresión $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ o $\frac{a}{b}=\frac{x}{s}$, según corresponda.

Despejando el valor de x en estas expresiones, obtenemos $x=\frac{bc}{a}$ o $x=\frac{ad}{b}$, según sea el caso.

Ejemplos

1. Si por tres horas de trabajo Juan gana $1 000, ¿cuánto cobrará por 10 horas?

Aplicando la regla de tres:

$$x=\frac{(10)(1000)}{3}\approx 3333.33.$$

Horas (h)	Dinero ($)
3	1 000
10	x

Es decir, Juan ganará $3 333.33 en 10 horas.

2. Un coche tarda 50 minutos en llegar a su destino con una velocidad de 60 km/h. ¿Cuánto tardará si su velocidad es de 120 km/h?

Al aplicar la regla de tres se obtiene:

$$x=\frac{(120)(50)}{60}=100.$$

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)
60	50
120	x

Tardará 100 min = 1 h 40 min en llegar a su destino.

Regla de tres simple inversa

Primero definimos dos magnitudes inversamente proporcionales cuando la razón de un lado disminuye y del otro lado aumenta y viceversa.

La regla de tres simple inversa se utiliza cuando el problema trata de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Para resolver esta regla de tres inversa seguimos la fórmula:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{ab}{c}.$$

Ejemplos

Si 20 trabajadores tardan 10 días en terminar el trabajo pendiente, ¿cuánto tiempo tardarán 30 trabajadores en terminar el mismo trabajo?

Trabajadores	Días
20	10
30	x

$x = \frac{(20)(10)}{30} \approx 6.67 \approx 7.$

Concluimos que 30 trabajadores tardarán aproximadamente 7 días en terminar.

Rosa desea sacar toda el agua de su cisterna para limpiarla y hace 100 extracciones con una cubeta de 10 litros de capacidad. Si la cubeta fuera de 18 litros, ¿cuántas extracciones haría Rosa para sacar toda el agua de la cisterna?

Capacidad (l)	Extracciones
10	100
18	x

Entonces $x = \frac{(10)(100)}{18} \approx 55.56 \approx 56$.

Rosa necesitaría hacer 56 extracciones para dejar vacía la cisterna.

Pedro utiliza tres bultos de 25 kg cada uno para alimentar a sus 12 perritos del refugio durante un mes (considerando que el mes tiene 30 días).

Si son adoptados 4 perritos, ¿para cuántos días habrá comida suficiente?

Considerando que Pedro tiene 12 perritos y ya adoptaron 4, quedan 8 perritos en el refugio.

Los datos del problema son:

Perritos	Días
12	30
8	x

Lo cual implica que: $x = \frac{(12)(30)}{8} = 45$.

Concluimos que la comida alcanzará para los próximos 45 días.

Actividad de aprendizaje 2

Productos esperados

Sigue las instrucciones dadas y guarda el resultado como evidencia de aprendizaje.

En esta actividad propondrás dos problemas con sus respectivas soluciones. En cada uno harás uso de la regla de tres simple directa y la regla de tres simple inversa.

¿Qué datos necesitas? ¿Qué debes tener en cuenta? ¿Cuál es la diferencia entre la regla de tres simple directa y la inversa? Elabora un diagrama o mapa conceptual con las características o diferencias de la regla de tres simple directa o inversa.

Propiedades geométricas

Supongamos que te hallas en esta situación:

Tú y tu familia van de día de campo, pero olvidan la tienda de campaña, sin embargo, ideas hacer una con un árbol del bosque, una lona y un palo de madera. Observa la Figura 2.4.

Si suponemos que la longitud de la sombra del árbol mide 6 metros, colocarías 6 trozos de madera a distancia de 1 metro. En esta situación, la razón entre la longitud de la sombra y la longitud del metro es de 6 a 1.

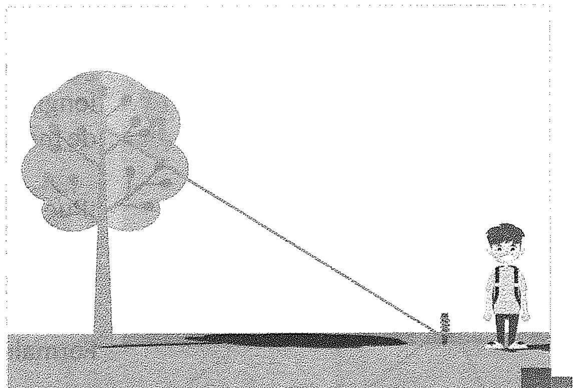


Figura 2.4

Diremos, en general, que en el proceso de medir una longitud consiste en encontrar el número de veces que usamos otra longitud a la que tomamos como unidad. Es bien sabida la importancia de utilizar propiedades geométricas en la resolución de problemas. Una propiedad geométrica se usa cuando simplemente aplicamos el razonamiento deductivo.

La razón geométrica es la igualdad entre dos razones geométricas. Se representa por $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. En la razón geométrica determinamos cuántas veces una magnitud contiene a otra. En geometría, la proporción se da entre segmentos y hacemos uso de sus vértices para que estén perfectamente definidos.

Notación. Usaremos letras mayúsculas y números (A, B, C, 1, 2, ...) para denotar los vértices originales y letras y números con prima (A', B', C', $1'$, $2'$, ...) para los vértices transformados.

Si elegimos un segmento u como unidad de medida, es posible asignar a cualquier otro segmento un número real. Dados dos segmentos, su razón será el valor de la relación entre las magnitudes de ambos segmentos.

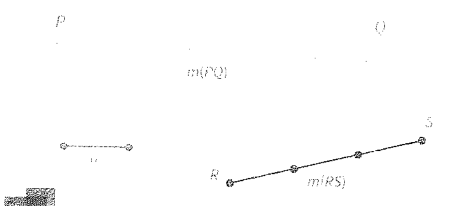


Figura 2.5

Cuando relacionamos dos razones, establecemos la proporción como la igualdad de dos razones $\frac{PQ}{RS} = \frac{m(PQ)}{m(RS)}$.

Donde $m(PQ)$ y $m(RS)$ representan las medidas de los segmentos PQ y RS, respectivamente. En la Figura 2.5, tomando como referencia el segmento u, tenemos que la medida del segmento PQ es 5 y la del segmento RS es 3.

Por lo tanto, la razón entre ambos segmentos es $\frac{5}{3}$, es decir, será la medida racional de PQ usando RS como unidad: $PQ = \frac{5}{3}RS$.

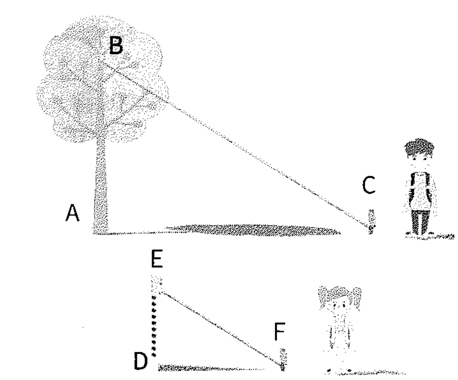


Figura 2.6

Retomando el ejemplo del árbol, supongamos que tu hermanita decide ayudarte y coloca un palito de madera indicando la unidad de medida, el metro, como se muestra en la Figura 2.6.

¿Qué podemos concluir? ¿Existe una relación entre ambas longitudes de las respectivas sombras del árbol y el palito de madera?

¡Pues sí! La geometría nos dice que existe una relación entre la razón de las longitudes de las sombras y los objetos que las proyectan.

Formalmente, ambas razones son siempre iguales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}.$$

Entonces, si en nuestro problema, el palito de madera que usó tu hermano mide 1.5 m, su sombra 1.8 m y la sombra del árbol 6 m, tenemos:

$\frac{1.5}{1.8} = \frac{x}{6}$, encontrando el valor de x, resulta que $x = 5$ metros.

Diremos que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que se establecen entre cada par son iguales.

Existe una explicación matemática de la propiedad que nos permitirá calcular las distancias y longitudes de objetos en situaciones similares a las de nuestro problema.

El siguiente teorema fue formulado por Tales de Mileto:

"Los segmentos homólogos en la proyección paralela que se establece cuando dos rectas distintas l y l' son cortadas por un par de rectas paralelas son proporcionales."

zando la Figura 2.7, representamos el teorema de a algebraica como:

$$\frac{PQ}{RS}=\frac{P'Q'}{R'S'}.$$

Observa que la razón entre los segmentos PQ y RS nos dice que existe un número real k tal que $PQ = k \cdot RS$, y el número k no es más que la medida de PQ usando el segmento RS como unidad.

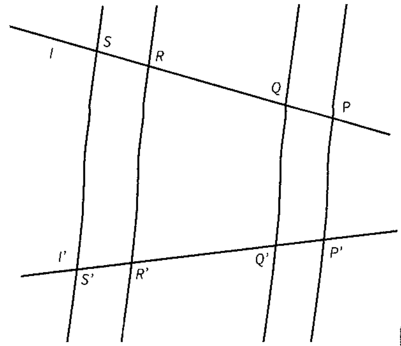


Figura 2.7

Una consecuencia del teorema de Tales:

Toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos lados un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero.

Ejemplos

1. Observemos la figura 2.8. Si en el triángulo ABC trazamos una recta paralela MN a la base del triángulo, es decir, a BC, el teorema de Tales nos dice que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ (1)

   Si volvemos a trazar una paralela AB por N, el teorema de Tales ocurre: $\frac{AN}{AC}=\frac{BP}{BC}=\frac{MN}{BC}$ (2)

   De (1) y (2) deducimos $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

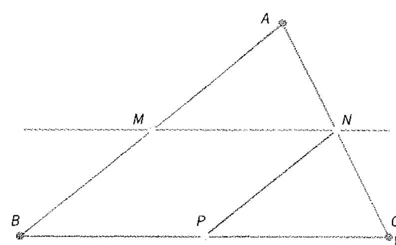


Figura 2.8

2. Dividiremos un segmento de 10 cm en partes proporcionales a dos segmentos de 2 cm y 3 cm. ¿Cuánto miden los segmentos resultantes?

   Los segmentos miden x y $10 - x$ respectivamente. Observa que se forman dos triángulos semejantes, porque sus ángulos son iguales (Figura 2.9), así: $\frac{3}{2}=\frac{10-x}{x}\Rightarrow 3x=(10-x)(2)$, esto es $3x = 20 - 2x$, del cual se obtiene $3x + 2x = 20$, es decir, $5x = 20$, por lo que $x = 4$.

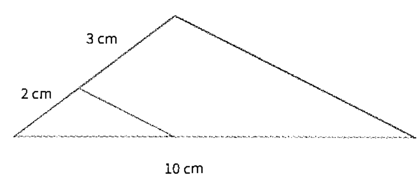


Figura 2.9

3. La sombra de una casa mide 8 m. A la misma hora, la sombra proyectada por un coche que mide 1.3 m de alto es de 4 m.

   Calcularemos la altura de la casa. Nota que hay una proporción directa, entonces podemos desarrollar lo siguiente:

$$\frac{x}{8}=\frac{1.3}{4}\Rightarrow 2.6 \text{ m}.$$

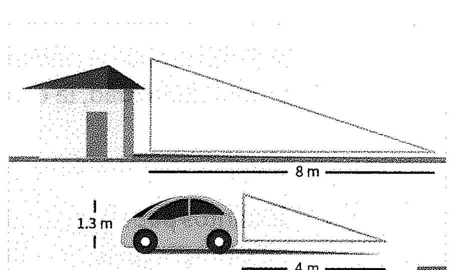
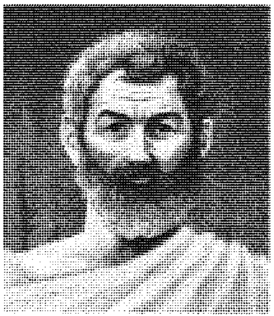


Figura 2.10



Tales de Mileto fue filósofo y matemático griego.

Inició su escuela en Mileto, la primera de las escuelas filosóficas de la Antigua Grecia. En geometría elaboró un conjunto de teoremas generales y de razonamientos deductivos a partir de los primeros. A Tales se le atribuye el teorema: Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado

La proporcionalidad tiene distintas formas de representación, en esta sección conocerás una nueva representación: la algebraica.

La proporcionalidad siempre se resume en esta expresión: $y = k \cdot x$.

Donde k es un valor constante. Esta expresión también representa la ecuación de una recta, donde a k la llamaremos pendiente de la recta y la representaremos con la letra m, así, la expresión se convierte en: $y = m \cdot x$.

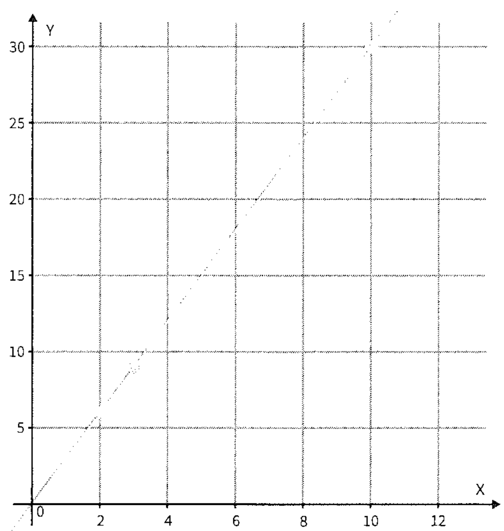
Ejemplos

1. En una granja, la razón de gallos a gallinas es de 1 a 3. Si hay 10 gallos, ¿cuántas gallinas hay?

Si representamos con x el número de gallos, tenemos $\frac{1}{3} = \frac{10}{x}$, resultando la ecuación de proporcionalidad $x = \frac{(10)(3)}{1} = 30$, entonces hay 30 gallinas.

Esta información la podemos clasificar en una tabla de valores, donde para obtener los valores de las gallinas solo multiplicamos el número de gallos por tres.

La constante de proporcionalidad es $k = \frac{3}{1} = 3$ En el primer parcial aprendimos a poner estos datos en una gráfica.



Gallos	Gallinas
1	3
2	6
3	9
10	30

Si y representa el número de gallinas, x es el número de gallos y k la constante de proporcionalidad, la expresión algebraica de este problema es $y = 3x$.

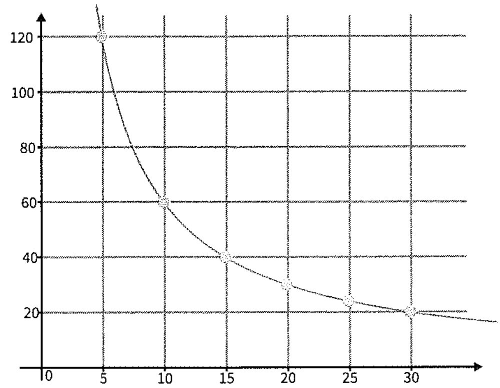
2. María desea remodelar su departamento, para eso planea comprar papel tapiz.

¿Cuántos papeles tapiz serán necesarios si con 10 cm de largo se cubre una longitud de 6 m? ¿Y si el papel tapiz tiene 5, 10, 15 o 20 cm?

Para obtener la expresión algebraica, buscamos primero la constante de proporcionalidad con la fórmula $m \cdot n = k$, en nuestro ejemplo $k = 600$, entonces la expresión será $m \cdot n = 600$ para cualesquiera valores de m y n.

Elaboremos una tabla y con ella una gráfica como se muestra enseguida.

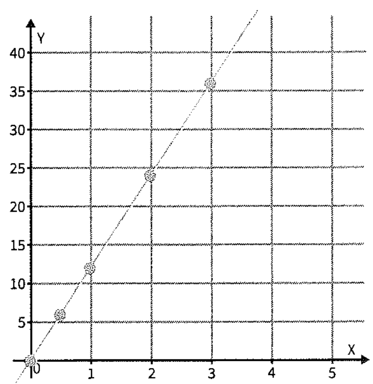
Longitud (m)	Piezas (n)
5	$\frac{100}{5} \cdot 6 = 120$
10	$\frac{100}{10} \cdot 6 = 60$
15	$\frac{100}{15} \cdot 6 = 40$
20	$\frac{100}{20} \cdot 6 = 30$
25	$\frac{100}{25} \cdot 6 = 24$
30	$\frac{100}{30} \cdot 6 = 20$



3. La distancia que un ciclista recorre a razón de 12 km/h, se puede representar de tres maneras distintas:

Primero con la ecuación $d = 12t$ donde d es distancia y t representa el tiempo. Y como siempre, por medio de una tabla y su respectiva gráfica:

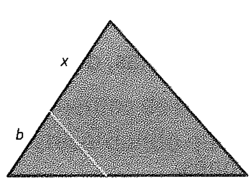
Tiempo (h)	Distancia (km)
0	0
0.5	6
1	12
2	24
3	36



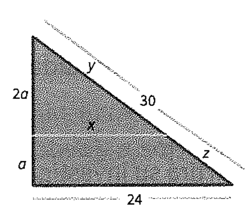
Actividad de aprendizaje 3

Resuelve los siguientes problemas.

1. Calcula el valor de x, considerando $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 6$ cm



2. Si tomamos como dimensión el metro, calcula los valores de x, y, z.



3. Representa de las formas distintas que ya conoces las situaciones:

   En un salón, la razón de niñas a niños es de 3 a 4. Si hay 21 niñas, ¿cuántos niños hay?

   La distancia de un automóvil a razón de 100 km/h.

   Por 6 días de trabajo, a Ema le pagaron \$4 000. ¿Cuánto ganará Ema por 13 días?

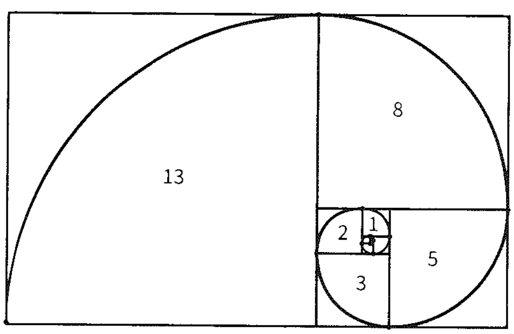
   Tu papá quiere preparar para tu cumpleaños un pastel, y en la receta dice que por cada 150 gramos de harina hay que añadir 15 gramos de cacao y chispas de chocolate. Tu papá decide que para el número de personas invitadas unos 45 gramos de cacao serán suficientes. ¿Cuántos gramos de harina necesitará para el pastel?

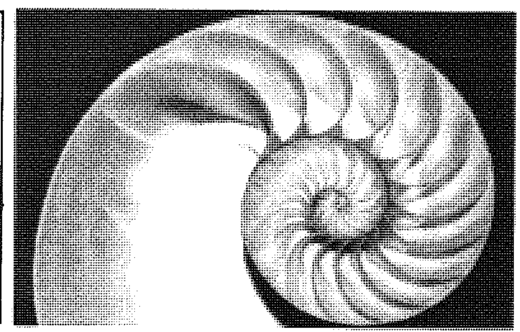
4. Si 5 kilos de naranjas cuestan \$100, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$1 200?
5. ¿Cuánto es 30 % de 800?
6. En una tienda de ropa hay descuento de 12 % sobre toda la ropa de niño. Ana desea comprarle un traje a su hijo con precio de \$460. ¿Cuál es el monto del descuento? ¿Cuál es el precio de oferta del traje?

Sigue las instrucciones dadas para preparar una exposición del tema propuesto.

La proporción áurea es tema de estudio de la geometría, se usa en arquitectura, artes, producción industrial, etcétera.

El siguiente video del pato Donald da una breve explicación de ella: https://www.youtube.com/watch?v=7h8dNH9Xnfg





En equipos de tres integrantes investiguen acerca de la proporción áurea. Te puedes apoyar en las preguntas de la lista.

1. ¿Qué es la proporción áurea?
2. ¿Quién la descubrió?
3. ¿Cómo encontrar la proporción áurea?
4. ¿Qué propiedades tiene?

La investigación debe incluir portada, desarrollo y conclusiones. Además, deberán prepararla para una exposición en aula.

Todo el grupo compartirá su investigación y llegarán a conclusiones.

Tratamiento de lo lineal y lo no lineal

Elementos del polinomio

Conoces el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y también las propiedades que posee. Dicho conjunto tiene dos operaciones: adición y multiplicación por escalares (elementos de $\mathbb{R}$), y en la primera parte de este libro has comprobado que cumple con ciertas condiciones, todas estas propiedades hacen del conjunto $\mathbb{R}$ el campo de los reales.

Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Con n un número natural y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son elementos de $\mathbb{R}$. Como puedes observar, un polinomio, cuya única variable es x, es una expresión algebraica formada solo por la suma de términos de la forma $a_i x^i$.

Definiremos el grado de un polinomio como el mayor exponente de x que aparece en la representación del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ cuyo coeficiente sea diferente de cero. Si $P(x) = c$, donde c es un escalar no nulo, entonces su grado es cero.

Ejemplos

1. Nota que son polinomios:
   - **a.** $5x + 2$
   - **b.** $3x^2 - 5x + 2$
   - **c.** $y^5 + 25y$
   - **d.** -22
   - **e.** $\frac{x}{2}$
2. Observa que no son polinomios:
   - **a.** $3y + \frac{5}{y^2}$
   - **b.** $3y + 4\sqrt[3]{9x - 3}$
   - **c.** $4xy^{-3}$
   - **d.** x^{-2}
   - **e.** $\sqrt{x^2 + 4}$

¿Cuáles son elementos de un polinomio? Dado un polinomio, llamamos término a cada expresión algebraica $a_i x^i$, recordando que i es número entero no negativo y a_i son números reales.

Ejemplos

1. El polinomio $-3x$ tiene solo un término
2. El polinomio $x^2 + 2x$ tiene dos términos

Términos

$$-5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1x + 4$$

Término constante

Coeficientes

Figura 2.11

Elementos de un polinomio.

El coeficiente numérico es el factor numérico del mismo. El término constante es el coeficiente numérico que no contiene variable.

El número a_n se denomina coeficiente principal y el número a_0 se denomina término independiente.

Dado un polinomio, éste se clasifica dependiendo del número de términos:

1. Monomio: cuando el polinomio tiene un término. $2x^5$ es un monomio.
2. Binomio: cuando el polinomio tiene dos términos. $3x^2 - \frac{x}{2}$ es un binomio.
3. Trinomio: cuando el polinomio tiene tres términos. $3x^3 - 2x^2 + x$ es un trinomio.
4. En general, llamamos polinomios a los que tienen dos o más términos. $x^3 - x^2 + 2x - 4$ es un polinomio.

Actividad de aprendizaje 4

Realiza lo que se pide.

1. Identifica si las expresiones algebraicas son polinomios o no.

$x^2 - x$

$2x^6 + 3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}$

$x^{-2} + 2x + 3$

$\frac{1}{5}x^3 + 2x$

$\frac{1}{2y}$

25

2. Clasifica los polinomios y encuentra su grado.

Expresión algebraica	Clasificación	Grado
$\frac{2}{5}x^3$		
$-2x^4 + 3x^3 - x + 5$		
$4x^6 - 5x^2$		
$2x^3 - 2x^2 + 4x$		

Polinomios lineales

Llamamos polinomio lineal al polinomio de grado uno, cuya forma es: $P(x) = a_1x + a_0$, el valor de a_0 puede ser cero o distinto de cero, pero a_1 debe de ser diferente de cero.

Los polinomios $3x-5$, $-x$ y $4x$ son lineales.

Un polinomio lineal es una función lineal. Recordemos que una función es una correspondencia entre dos conjuntos: el conjunto de partida, llamado dominio, y el conjunto de llegada, llamado codominio, a cada elemento del dominio le corresponde uno, y solo uno, del codominio, como se muestra en la Figura 2.12.

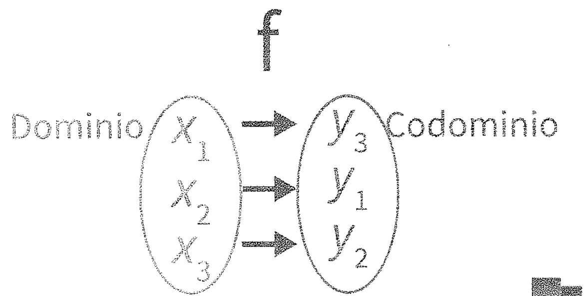


Figura 2.12

Elementos de una función.

Una función lineal es una función cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)= ax + b$.

Ejemplo

Consideramos funciones lineales a las siguientes:

a. $f(x) = 3x - 2$ b. $m(y) = -2y + 1$ c. $b(x) = 6x + 4 - 3x$

Las funciones lineales sirven para modelar diversas situaciones. Por ejemplo, la distancia que recorre un avión que viaja a una velocidad de 450 millas por hora, en función del tiempo de vuelo. Si s representa la distancia en millas y t el tiempo en horas, la función que la representa es: $s(t) = 450t$.

Ejemplo

Un problema muy recurrente en los textos matemáticos es: "Piensa un número, divídelo entre dos y súmale 6. ¿Qué número resultó?".

Este problema se puede expresar algebraicamente con un polinomio lineal de la forma $f(x) = \frac{x}{2} + 6$.

Actividad de aprendizaje 5

Expresa algebraicamente la función de cada una de las situaciones.

1. La función que a cada número le asocia su triple.
2. La función que a cada número le asocia su mitad más 20.
3. Un año de vida de un humano equivale a 7 años de vida de un perro.
4. La tarifa de una empresa de telefonía es de $12 por tasa fija más $5 por cada minuto extra. Determina la función "precio por minuto" en relación a los minutos.

5. Los impulsos en los nervios viajan a una velocidad de 235 pies/segundo. La distancia recorrida en t segundos está dada por la función.

Identifica cuáles de estas funciones son lineales.

1. $2x - 3$	2. $5x + 2x - 10$	3. $x^2 + x - 2$
4. $-x^2$	5. $x^3 + x$	6. $\frac{x}{3} + 4$

Polinomios cuadráticos

Un polinomio con una variable, por ejemplo x, se dice cuadrático si es de grado 2. La forma general de un polinomio cuadrático es:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Ejemplo

Los siguientes son polinomios cuadráticos:

$3x^2 + x$	$-2x^2$
$x^2 + x + 4$	$\frac{x^2+x+4}{2}$

¡Y sí! Los polinomios cuadráticos también expresan diversas situaciones, ¿cuáles? Las descubriremos a continuación.

Supongamos que t representa el tiempo en segundos y $d(t)$ la distancia en metros que una pelota cae después de t segundos. Si la distancia que cae la pelota después de t segundos es $10t^2$ metros, dicha situación se puede escribir como $d(t) = 10t^2$.

Una de las propiedades de los números reales es: todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, una manera práctica de indicar las dos raíces cuadradas de un número es utilizando el símbolo "más menos" ($\pm$). Por ejemplo, las raíces cuadradas de 16 pueden indicarse mediante ± 4, y se lee "más menos 4". La ecuación $x^2 = 16$, tiene dos soluciones; las dos raíces cuadradas de 16, que son precisamente ± 4.

La siguiente propiedad de la raíz cuadrada nos ayuda a determinar las soluciones de polinomios cuadráticos de la forma $x^2 = a$. En el tercer parcial, introduciremos conceptos que nos ayudarán a dar solución a los polinomios cuadráticos de la forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Propiedad de la raíz cuadrada: si $x^2 = a$, donde a es un número real, se cumple que $x = \pm\sqrt{a}$.

Ejemplo

Encontraremos el valor de x en las ecuaciones:

a. $x^2 = 25$

Aplicando la propiedad de la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

b. $2x^2 = 72$

Para aplicar la propiedad de la raíz cuadrada debemos dejar la ecuación en la forma general, es decir, $x^2 = \frac{72}{2} = 36$ para luego aplicar la propiedad: $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$.

c. $x^2 + 10 = 59$

Hacemos $x^2 = 59 - 10 = 49$, entonces $x^2 = 49$. Aplicando la propiedad de la raíz cuadrada obtenemos: $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

d. $(a - 5)^2 = 32$

Aplicando la propiedad de la raíz cuadrada: $a - 5 = \pm\sqrt{32}$, despejando a y simplificando obtenemos: $a = \pm\sqrt{32} + 5 = \pm\sqrt{16}\sqrt{2} - 5 = \pm 4\sqrt{2} + 5$.

Actividad de aprendizaje 6

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Identifica cuáles ecuaciones generan un polinomio cuadrático.
   a. $x^2 - 2 = 0$
   b. $3x^2 = 33$
   c. $-5x^2 + x + 3x^2 = 4$
   d. $-5x^2 = 30 - 8x^2$
   e. $4x(x - 2) = 3x^2 + 2x - x^2$
2. Encuentra las raíces de cada ecuación cuadrática.
   a. $x^2 = 33$
   b. $3x^2 - 10 = 24$
   c. $x^2 + 3 = 13$
   d. $10x^2 - 30 = 700$
   e. $(y + 3)^2 - 28 = 0$
   f. $(a - 10)^2 = 64$

Operaciones con polinomios

Ten presente que un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo a todos los términos del polinomio que están dentro del paréntesis, por ejemplo:
$x - (9x^2 - 3) = x - 9x^2 + 3$.

En esta sección veremos cómo sumar, restar, factorizar, multiplicar y dividir polinomios. Iniciemos introduciendo la definición de monomios semejantes.

Recordemos que un monomio es el producto de un número (coeficiente) por una o más indeterminaciones elevadas a números enteros positivos (parte literal y potencias en cada literal).

Diremos que dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal y las mismas potencias.

Ejemplo

Son semejantes los polinomios:

$5x^2$ y $-x^2$ $\qquad$ $\frac{-x}{3}$ y $2x$ $\qquad$ x^3 y $24x^3$

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, sumamos los monomios semejantes y conservamos sus exponentes en la parte literal.

Por ejemplo, para sumar $P(x) = 3x^2 - 4x$ y $Q(x) = x^2 + 2x + 3$, tenemos:

$$\begin{array}{r} P(x) = 3x^2 - 4x \\ + \quad Q(x) = \ \ x^2 + 2x + 3 \\ \hline P(x) + Q(x) = 4x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

El opuesto de un polinomio es el que obtenemos al cambiar los signos a todos sus coeficientes.

Por ejemplo, el opuesto de $Q(x) = 6x^2 + 5x - 4$ es $-Q(x) = -6x^2 - 5x + 4$.

Así, para restar dos polinomios, sumamos al primer polinomio el opuesto del segundo.

Por ejemplo, para restar los polinomios $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$ y $Q(x) = 3x^3 - x^2 + 24$, tomamos el opuesto de $Q(x)$ resultando $-Q(x) = -3x^3 + x^2 - 24$, y sumamos ambos polinomios:

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad x^3 + 2x^2 - 2x \qquad \\ + \ -Q(x) = -3x^3 + \ \ x^2 \qquad - 24 \\ \hline P(x) - Q(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x - 24 \end{array}$$

Ejemplos

1. Sumaremos $24x^3 + 2x$ y $14x^3 - 5$:

$$\begin{array}{l} 24x^3+2x \\ \underline{14x^3 \quad\quad -5} \\ 38x^3+2x-5 \end{array}$$

Resultando $38x^3 + 2x - 5$.

2. Para restar los polinomios $x^4 + 2x^3 - 4x + 2$ y $2x^3 + 8x + 2$, encontramos el opuesto del polinomio $2x^3 + 8x + 2$, que es $-2x^3 - 8x - 2$ y sumamos:

$$\begin{array}{l} x^4+2x^3-4x+2 \\ \underline{\quad\;\; -2x^3-8x-2} \\ x^4 \qquad\quad -12x \end{array}$$

Resultando $x^4 - 12$.

Para saber más

Recuerda que un paréntesis agrupa (asocia) a toda una expresión, por lo que $(-x)^2$ es diferente que $-(x)^2$.

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios debemos multiplicar cada monomio del primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo, recordando las propiedades de los signos y exponentes, por último, sumamos los términos semejantes.

Ejemplo

Sean $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = -5x + 3$. Efectuamos la multiplicación por dos métodos.

a. Método 1:

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (x^2+2x+1)(-5x+3) \\ &= x^2(-5x+3)+2x(-5x+3)+1(-5x+3) \\ &= -5x^3+3x^2-10x^2+6x-5x+3 \\ &= -5x^3-7x^2+x+3 \end{aligned}$$

b. Método 2:

$$\begin{array}{rrrrr} & P(x)= & x^2 & +2x & +1 \\ \times & Q(x)= & & -5x & +3 \\ \hline (3)P(x)= & & 3x^2 & +6x & +3 \\ (-5x)P(x)= & -5x^3 & -10x^2 & -5x & \\ \hline & -5x^3 & -7x^2 & +x & +3 \end{array}$$

Las potencias son un caso de la multiplicación de polinomios; el polinomio se multiplicará por sí mismo tantas veces como lo indique la potencia:

Ejemplos

1. Calcularemos $[P(x)]^2$, donde $P(x) = 2x^2 - 3$.

   $(2x^2 - 3)^2 = (2x^2 - 3)(2x^2 - 3) = 2x^2 \cdot (2x^2 - 3) - 3 \cdot (2x^2 - 3) = 4x^4 - 6x^2 - 6x^2 + 9$

   $= 4x^4 - 12x^2 + 9$

2. Desarrollaremos $[Q(x)]^3$, donde $Q(x) = -x^3 + 5x$.

   $(-x^3 + 5x)^3 = (-x^3 + 5x)(-x^3 + 5x)(-x^3 + 5x) = (-x^3 + 5x)(x^6 - 10x^4 + 25x^2)$

   $= -x^9 + 10x^7 - 25x^5 + 5x^7 - 50x^5 + 125x^3$

   $= -x^9 + 15x^7 - 75x^5 + 125x^3$

División de polinomios

La división de un polinomio entre un monomio se efectúa dividiendo cada término del polinomio entre el monomio. Ten en cuenta que al dividir polinomios:

1. El grado del dividendo tiene que ser mayor o igual que el grado del divisor.
2. El grado del resto debe ser menor que el del divisor.
3. El grado del cociente es la diferencia entre el del dividendo y del divisor.

Ejemplo

Dividamos el polinomio $P(x) = 4x^2 + 16x + 8$ entre el monomio $Q(x) = 2x$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^2 + 16x + 8}{2x} = \frac{4x^2}{2x} + \frac{16x}{2x} + \frac{8}{2x} = 2x + 8 + \frac{4}{x}.$$

La división de polinomios es bastante similar que la de números reales. En la división se cumple que el dividendo, $D(x)$, es igual al producto del divisor, $P(x)$, por el cociente, $Q(x)$ más el resto $R(x)$:

$$D(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

A esta operación también se le llama división entera de polinomios. Este tipo de división siempre genera un polinomio, a diferencia de dividir entre un monomio, como en el caso anterior, sin embargo, la expresión resultante se puede operar como si de un polinomio se tratase.

Aquí te dejamos algunos pasos que te ayudarán a resolver la división entera de polinomios.

1. Debes comprobar que ambos polinomios están ordenados conforme a los exponentes de manera decreciente, dejando un espacio donde falte el término de algún grado.
2. Divides el término principal del dividendo entre el término principal del divisor. El resultante será el primer término del cociente.
3. Multiplicas el resultado del paso anterior por cada término del divisor, y el resultado se restará al dividendo.
4. Repetirás el proceso hasta que el polinomio que hayas obtenido tenga un grado menor que el divisor.

Ejemplo

Efectuaremos la división de los polinomios $S(x) = 2x^4 + 8x^2 + 2x - 6$ y $T(x) = x^2 + 2x$.

Paso 1.

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x & \overline{2x^4+\square+8x^2+2x-6} \end{array}$$

Paso 2.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2 \\ x^2+2x & \overline{2x^4+\square+8x^2+2x-6} \end{array}$$

Paso 3.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2 \\ x^2+2x & \overline{2x^4+\square+8x^2+2x-6} \\ & -\underline{(2x^4+4x^3)} \\ & \quad -4x^3+8x^2 \end{array}$$

Paso 4. (Paso 2. para $-4x^3$)

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2-4x \\ x^2+2x & \overline{2x^4+\square+8x^2+2x-6} \\ & -\underline{(2x^4+4x^3)} \\ & \quad -4x^3+8x^2 \end{array}$$

Paso 4. (Paso 3. para $-4x^3$)

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2-4x \\ x^2+2x & \overline{2x^4+\square+8x^2+2x-6} \\ & -\underline{(2x^4+4x^3)} \\ & \quad -4x^3+8x^2 \\ & \quad -\underline{(-4x^3+8x^2)} \\ & \qquad\qquad 0+2x-6 \end{array}$$

Paso 4. El exponente de $2x$ ya es menor que el de x^2, termina el proceso de dividir, quedando :

$$P(x) = x^2 + 2x$$

$$Q(x) = 2x^2 - 4x$$

$$R(x) = 2x - 6$$

$$D(x) = (x^2 + 2x)(2x^2 - 4x) + (2x - 6)$$

$$\mathrm{D}(x) = 2x^4 + 8x^2 + 2x - 6$$

Una división exacta es cuando el resto es 0, por lo tanto, $D(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

Ejemplo

Realicemos la división de los polinomios $P(x) = 4x^3 + 10x^2 + 4x$ y $Q(x) = 2x + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+4x \\
\cline{2-2}
2x+1 & 4x^3+10x^2+4x \\
 & -(4x^3+2x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 8x^2+4x \\
 & \qquad -(8x^2+4x) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

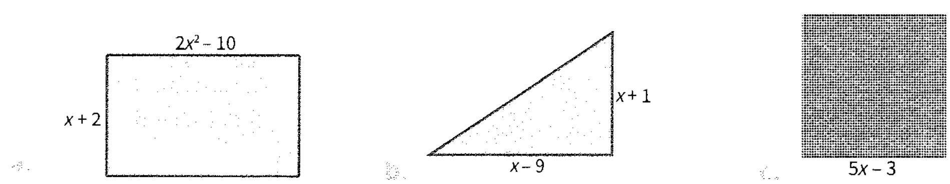
Así, $4x^3 + 10x^2 + 4x = (2x + 1)(2x^2 + 4x)$.

Recuerda que seguimos trabajando sobre el conjunto de los reales y basta recordar los algoritmos básicos de las operaciones en este conjunto para entender mejor las operaciones entre polinomios. Cada que comiences un tema que involucre a los números reales, busca la forma análoga de cómo se realiza en el campo que ya conoces.

Actividad de aprendizaje 7

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Encuentra el área de cada una de las figuras.



2. Efectúa las operaciones.

a. $(3x^3 + 2x^2 + 10x - 9) + (2x - 3)$

b. $(25x^5 - x^3 + 8x + 2) + (2x^5 - 3x^3 + 6x)$

c. $(7x^6 + 2x^3 - 4x^2 - 7) - (2x^5 - 2x^3 - 7)$

d. $(10x^3 + 4x^2 - 3x + 5) - (8x^3 + 4x^2 - 7)$

e. $(2x^3 + 6x^2 - 3) + (2x^3 - 6x^2) - (4x^3 + 2x + 10)$

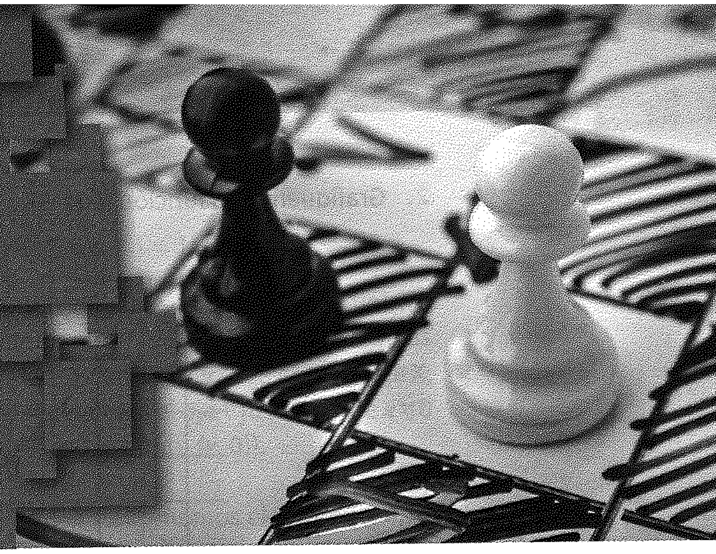
f. $(x + 1)(x + 3)(x^2 - 1)$

g. $5(x + 2)^2$

h. $(10x + 2)$ entre 2

i. $(x^2 + 8x + 16)$ entre $(x + 4)$

j. $(x^2 - 4)$ entre $(x - 2)$



El trabajo simbólico

Evaluación y gráfica de funciones lineales

Para evaluar una función polinomial se utiliza la sustitución, como en las demás funciones reales.

Ejemplo

Sea la función polinomial $f(x) = P(x)$, $P(x) = 2x - 1$, queremos determinar $f(0)$, $f(-1)$ y $f(3)$.

Tenemos:

$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$

$$f(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3$$

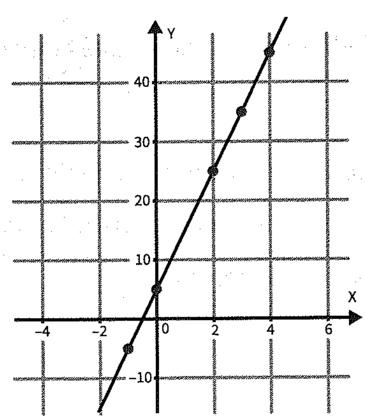
$$f(3) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5.$$

Para graficar una función lineal daremos algunos valores del dominio a la variable x. Al evaluar la función dando valores a x, obtenemos valores para la variable y, y así obtenemos el bosquejo de la gráfica de la función.

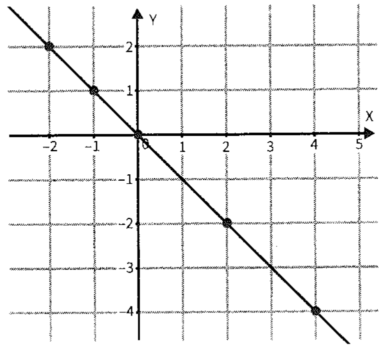
Ejemplos

1. Graficaremos la función $f(x) = 10x + 5$.

x	$f(x) = y$
−1	−5
0	5
2	25
3	35
4	45

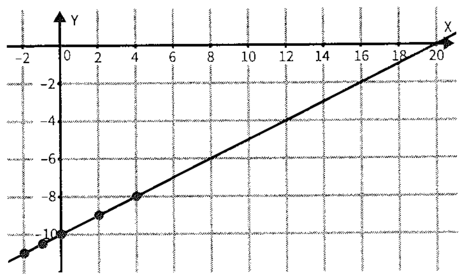


2. Grafiquemos la función $f(x) = -x$.



x	$f(x)$
−2	2
−1	1
0	0
2	−2
4	−4

3. Hallaremos la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{2}-10$.



x	y
−2	−11
−1	−10.5
0	−10
2	−9
4	−8

Toda función lineal tendrá como gráfica una recta. Pero no todas las rectas son iguales, si te has fijado, algunas van hacia abajo, otras hacia arriba, otras más tienen una inclinación más notoria, todas pasan por dos puntos diferentes entre sí, de lo contrario serían las mismas rectas.

Existen elementos de la recta que nos ayudan a analizar sus características, aquí te los presentamos.

La pendiente de una recta que pasa a través de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$, es:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

La ecuación de la recta que pasa a través de (x_1, y_1) y tiene pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$. La ecuación de la recta con pendiente m e intersección en $-b$ es: $y = mx - b$.

La pendiente nos indica hacia dónde y qué tanto se inclina la recta:

1. Si $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha.
2. Si $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda.
3. Si $m = 0$, la recta es horizontal.

Ejemplos

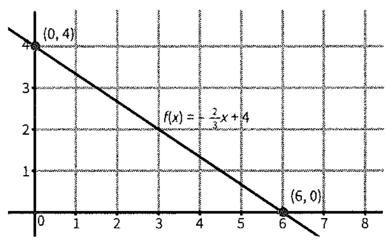
1. Graficaremos la función $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

   Para graficarla solo será necesario encontrar dos puntos que satisfagan la ecuación y unirlos con una línea recta. Los puntos que hallemos serán las intersecciones de la línea recta con los ejes coordenados X y Y. Es decir, la intersección de x es el punto donde la gráfica cruza al eje X; la intersección y es donde la recta cruza al eje Y. Esto es, la recta cruza al eje Y justo donde $x = 0$ (en la coordenada $(0, y)$) y la recta cruza al eje X, donde $y = 0$ (en el punto $(x, 0)$).

   Resolvemos la ecuación para y, entonces $y = f(0) = -\frac{2}{3}(0) + 4 = 4$ y obtenemos el punto (0, 4).

   Para hallar la intersección con el eje X, hacemos $y = 0$ y resolvemos para x: $0 = -\frac{2}{3}x + 4$, que es $\frac{2}{3}x = 4$, despejando x obtenemos $x = \frac{4 \cdot 3}{2}$, es decir, $x = 6$, así obtenemos el punto (6, 0).

   Graficando ambos puntos (0, 4) y (6, 0) y uniéndolos con una línea recta, conseguimos la gráfica de la función:



   La pendiente de esta recta es $m = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, esto comprueba que la recta se inclina hacia la izquierda.

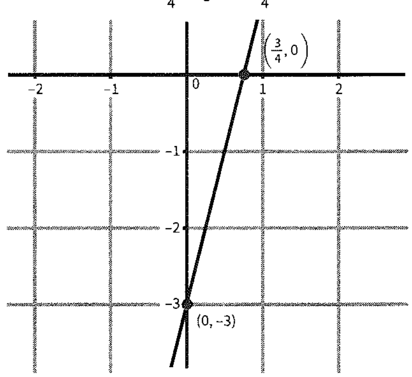
2. Graficaremos la función $f(x) = 4x - 3$.

   Para y: $y = f(0) = 4(0) - 3 = -3$, obtenemos el punto (0, –3).

   Para x: $f(x) = 4x - 3 = 0$, que resulta en $4x = 3$, es decir, $x = \frac{3}{4}$, obteniendo el punto $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

   Por lo tanto, las intersecciones con los ejes están dadas por los puntos (0, –3) y $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$. La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{0-(-3)}{\frac{3}{4} - 0} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$



Actividad de aprendizaje 8

Representa las funciones y obtén sus pendientes.

a. $3x - 2$ b. $5x + 10$ c. $-4x - 2$

d. $8x + 3$ e. $\frac{x}{2} + 3$ f. $5x$

Resolución de ecuaciones lineales

Ya habrás notado que durante las secciones anteriores hemos dado herramientas para encontrar el valor faltante en una ecuación lineal, por ejemplo, el teorema fundamental de las proporciones. En esa sección te daremos los pasos a seguir para la resolución de ecuaciones lineales.

Las ecuaciones lineales simples son aquellas que solo requieren del paso 1, que daremos enseguida, para encontrar una ecuación equivalente y aislar la variable en un lado del signo de igualdad.

1. Identifica qué operación debes efectuar para que el valor de x quede solo en un lado del signo de igualdad (=).
2. Identifica la operación inversa que permitirá deshacernos de la parte no deseada en el lado donde se encuentre la x.
3. Efectúa la operación identificada en el paso 2 en ambos lados de la ecuación.
4. Resuelve la ecuación.
5. Verifica la solución sustituyendo el valor de x encontrado en la ecuación original.

Ejemplos

1. Resolveremos la ecuación $y + 5 = 11$.

   Queremos deshacernos del 5 que suma, la operación inversa a realizar es la resta en ambos lados: $y + 5 - 5 = 11 - 5$.

   Concluimos que $y = 6$. Verificación: $(6) + 5 = 11$.

2. Encontraremos la solución a la ecuación $m - 7 = 20$.

   El número que deseamos eliminar es el 7 que resta, usamos la operación inversa en ambos lados (la suma): Sumamos 7 en ambos miembros de la ecuación: $m - 7 + 7 = 20 + 7$.

   Tenemos entonces que $m = 27$. Verificación: $(27) - 7 = 20$.

3. Deseamos resolver $10m = 30$.

Ahora el 10 que multiplica es indeseable, la operación inversa a realizar es la división entre 10 en ambos lados: $\frac{10m}{10} = \frac{30}{10}$.

Lo que resulta en $m = 3$.

Comprobación: $10(3) = 30$.

4. Resolvamos $3x + 4 = -8$.

En este caso, primero debemos deshacernos del 4 que suma, posteriormente el 3 que multiplica, entonces restamos 4 en ambos miembros de la ecuación y luego dividimos entre 3 de los dos lados:

$3x + 4 - 4 = -8 - 4$, que resulta en $3x = -12$. Luego realizamos $\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$.

Por lo tanto $x = -4$. Comprobación: $3(-4) + 4 = -12 + 4 = -8$.

5. Solucionemos $\frac{2x}{3} + 3 = 6$.

Para esta ecuación, primero debemos deshacernos del 3 que suma, posteriormente el 3 que divide y finalmente el 2 que multiplica, entonces restamos 3 en ambos miembros de la ecuación, luego multiplicamos por 3 a los dos lados y finalmente sacamos mitades:

$\frac{2x}{3} + 3 - 3 = 6 - 3$, es decir, $\frac{2x}{3} = 3$.

Procedemos a multiplicar por 3: $\frac{2x}{3}(3) = 3(3)$, lo que resulta en $2x = 9$.

Sacamos mitades: $\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$, tenemos finalmente que .

Comprobación:

$$\frac{2\left(\frac{9}{2}\right)}{3} + 3 = \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6.$$

Actividad de aprendizaje 9

- **Halla la solución de las ecuaciones.**

a. $3x + 1 = 34$ b. $x + 12 = 25$ c. $5x + 9 = 45$

d. $12x - 12 = 144$ e. $-13x - 3 = 10$ f. $\frac{x}{2} + 5 = 10$

g. $\frac{4}{3}x = 56$ h. $\frac{3}{7}x - 3 = 1$ i. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

- **Elabora un resumen con la relación entre pendiente, razón de cambio, sucesiones aritméticas y la ecuación de una función lineal.**

Interpretaciones de la solución de una ecuación lineal

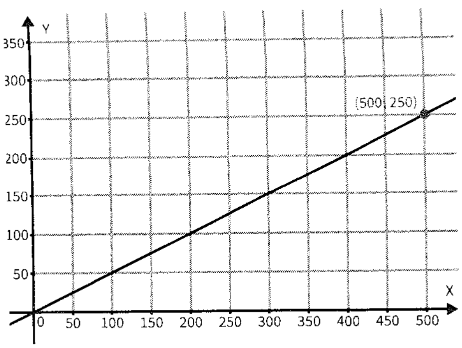
Las ecuaciones lineales son muy útiles en física, biología, medicina, incluso para describir fenómenos de la vida cotidiana.

En esta sección te mostraremos diferentes situaciones dónde se usan las ecuaciones y su solución tiene una interpretación.

Ejemplos

1. Una profesora sacó copias para dejar tarea a sus alumnos, el paquete de copias consta de 500 hojas. Suponiendo que las copias son a una cara y cada una cuesta \$0.50, encontremos la representación gráfica de esta situación.

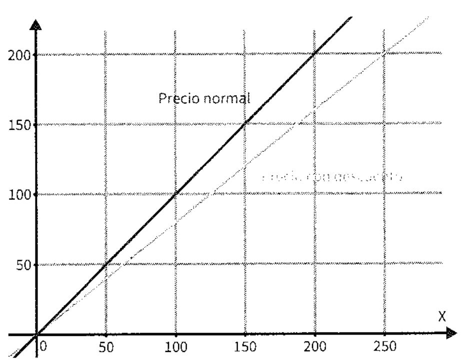
   La función que describe esto es $c(x) = 0.5x$. Recurriremos a la tabulación para graficar.



Hojas	Costo
1	0.5
2	1
5	2.5
10	5
100	50
300	150
500	250

En vacaciones decembrinas, David desea llevarle obsequios a su familia, para ello fue a una tienda con los artículos al 20 % de descuento. ¿Qué función representa esta situación?

Sea x el precio del artículo antes del descuento y sea y el precio aplicando el descuento, puesto que el descuento es de 20 %, así, la función es $f(x) = 0.8x$.



Precio original	Precio con descuento
200	160
350	280
150	120
90	72
80	64

3. Contestemos la pregunta ¿Cuánto tarda Josué en recorrer una distancia de 50 km a una velocidad de 60 km/h?

La fórmula para saber el espacio recorrido está dada por $e = v \cdot t$, donde v es la velocidad y t el tiempo. Los datos del problema son $e = 50$ km y $v = 60$ km/h. Observa que tenemos la misma unidad (km), proseguimos a sustituir en la ecuación y despejamos la variable en la ecuación t: 50 km = (60 km/h) $\cdot\, t$.

Despejando t: $t = \frac{50\text{ km}}{60\text{ km/h}} = 0.8\overline{3}\text{ h}$, que equivale a $t = 0.8\overline{3} \cdot 60 = 50$ min.

4. Tu familia y tú salieron de viaje, ya llevan 21 km de recorrido, en ese momento preguntas: ¿cuánto falta?, tu mamá te contesta —Hemos recorrido tres séptimas partes del camino. Determinaremos cuántos kilómetros falta recorrer.

Sea x la longitud del trayecto en kilómetros. Tú y tu familia han recorrido tres séptimas partes del trayecto: $\frac{3}{7}x = 21$, resolviendo tenemos:

$(7)\frac{3}{7}x = (7)21$, entonces $3x = 147$. Dividimos entre 3 en ambos miembros, quedando: $\frac{3x}{3} = \frac{147}{3}$, es decir, $x = 49$.

El trayecto es de 49 km y faltan por recorrer 49 – 21 = 28 km.

5. Las ventas de una fábrica de productos de lavado crecieron de \$6 500 000 en 1995 a \$11 000 000 en 2010.

Suponiendo que las ventas se aproximan a una función lineal, consideramos $v(t) = mt + b$, buscamos expresar las ventas en función del tiempo.

Las ventas son entre 1995 y 2010, una diferencia de 15 años. Tomando 1995 como el inicio del análisis, es decir, $t = 0$, y 2010 como el valor final, $t = 15$, obtenemos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{11\ 000\ 000 - 6\ 500\ 000}{15 - 0} = \frac{4\ 500\ 000}{15} = 300\ 000$$

A continuación sustituimos $v = 6\,500\,000$ en $t = 0$ y despejamos la variable b:

$6\,500\,000 = m(0) + b$, luego sustituimos m en la ecuación: $6\,500\,000 = (300\,000)(0) + b$.

Como el producto es cero, $6\,500\,000 = 0 + b$.

Reescribiendo tenemos: $b = 6\,500\,000$.

La función es: $v(t) = 300\,000t + 6\,500\,000$. La gráfica se muestra en la Figura 2.13 .

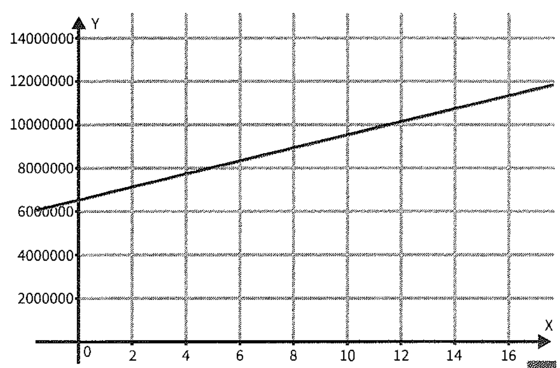
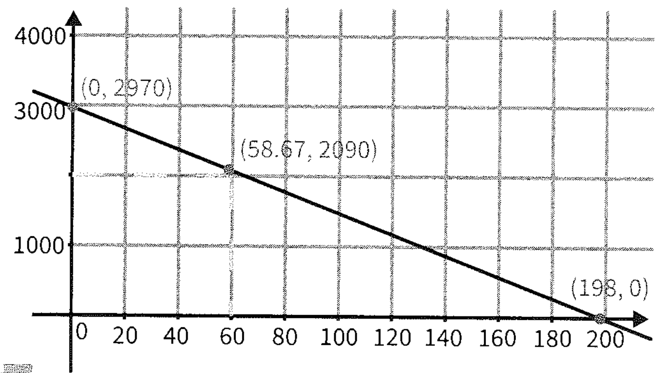


Figura 2.13

Un farmacólogo mezcla granos de \$12.00 el kilo, con otros de \$27.00 el kilo, con la finalidad de obtener 110 kilos de una mezcla de \$20.00 el kilo. Contestaremos la pregunta: ¿Cuánto de cada uno de los granos debe ir en la mezcla?

Pongamos x como la cantidad de granos de \$12.00, $(110 - x)$ será la cantidad de grano de \$27.00, por tanto, la función es:

$$m(x) = 12x + 27(110 - x) = 2970 - 15x.$$



Sustituimos el valor de la mezcla deseada para m: $20(110) = 2970 - 15x$, resolvemos la ecuación: $15x = 2970 - 2200 = 770$. Dividimos entre 15:

Resultando $x = \frac{770}{15} \approx 51.33$ kilos de \$12.00. Sustituyendo x en la ecuación para los granos de \$27.00, resultan: $110 - 51.33 = 58.67$ kilos de \$27.00.

Las coordenadas importantes que consideraremos para graficar la función son: (58.67, 2090), (0, 2970) y (198, 0). Observa la gráfica en la Figura 2.14.

Actividad de aprendizaje 10

Productos esperados

Resuelve los problemas.

1. Ana recabó esta información en una investigación. ¿Cuál es la gráfica?

Peso	0	1	2	3	4
Longitud	5	7	9	11	13

2. Luisa tiene 20 años, su edad es la tercera parte de la edad de su mamá. Encuentra la ecuación que determina la edad que tiene la mamá de Luisa.
3. ¿Qué cantidad de jarabe con contenido de 0.5 % de azúcar debe mezclar un fabricante, en 100 litros con 0.8 % de azúcar para conseguir una mezcla que contenga 0.6 % de azúcar?
4. Una fábrica de ropa produjo 5 400 prendas en una jornada laboral que deben ser repartidas a tres distribuidoras de la siguiente manera: en la primera, llamémosla *A*, deben entregar el triple de ropa que en la distribuidora *B* y en la *B* debe llegar la mitad que en la distribuidora *C*. Calcula qué cantidad de prendas deberán llegar a cada distribuidora.

Realiza una investigación sobre la conversión de unidades y sus equivalencias, representa los datos en una tabla y determina el tipo de relación que existe entre unidades. Guárdala como evidencia de aprendizaje.

Suma anécdota

Fibonacci es el sobrenombre con el que se conoció al rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240) quien aprovechó sus viajes comerciales por todo el Mediterráneo para entablar contacto y discutir con los matemáticos más notables de la época, descubrir y estudiar a fondo los elementos de Euclides, que tomó como modelo de estilo y rigor.

A Leonardo se le atribuyen reglas claras para efectuar operaciones con números enteros, fracciones, la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada, resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo. Inventó una curiosa sucesión llamada "sucesión de Fibonacci" que colocó junto al conocido "problema de los conejos":

Cuando una pareja de conejos alcanza la edad fértil, engendra una pareja de conejos, que, a su vez, tras ser fértiles, engendrarán cada mes una pareja de conejos, ¿cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Fibonacci en italiano significa hijo de Bonacci, pero en realidad sus amigos y conocidos se referían a él con el sobrenombre de Bigollo, que tiene dos significados: inútil o viajero, lo viajero puede ser por su espíritu viajero y lo inútil se debe a la obsesión por aplicar las matemáticas a problemas cotidianos y "desaprovechar" el tiempo en pensamientos inútiles para no resolver nada.

Debes notar que Leonardo de Pisa no estudió para ser matemático, él era comerciante y sin embargo, escribió muchas obras matemáticas, conoció y compartió conocimientos con matemáticos, es decir, estaba determinado a hacer matemáticas, era autónomo y se relacionaba con los demás, ¡Leonardo trabajaba bien las matemáticas!

¿Pa, qué era bueno Leonardo de Pisa? ¡Sí! Para las matemáticas.

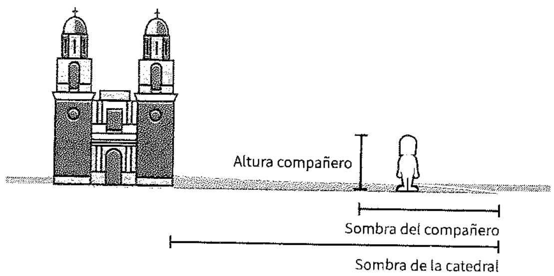
Una de las teorías de la personalidad y la motivación más importantes hoy en día es la teoría de la autodeterminación, la cual establece que las personas tenemos tres necesidades psicológicas básicas: ser competentes (hacer algunas cosas bien), ser autónomas (tomar nuestras decisiones) y relacionarnos con los demás. Este ejercicio ayuda a que los jóvenes se sientan competentes, al darse cuenta de que hay muchas cosas que hacen bien

1. Durante 7 minutos enlista todas las cosas que haces bien, no sólo en el ámbito escolar, sino en cualquiera: tocar algún instrumento, cocinar mole, bordar, arreglar celulares, jugar futbol, ¡toda habilidad es importante!
2. Cuando termines, te integrarás a un equipo de tres personas y compartirán lo que escribieron (dos o tres minutos cada uno). Los compañeros pueden comentar: Si ya sabían eso de ti, si se han enterado de algo que los haya sorprendido agradablemente, etcétera.

¡Qué esperas para desarrollar tus talentos y habilidades!

Proyecto integrador

En equipos de tres integrantes llevarán a cabo la siguiente actividad. Necesitarán un flexómetro, una libreta, un lápiz y un sombrero ¡para la protección solar!



Seguro conoces la catedral de la ciudad de Puebla, en esta actividad aplicarás lo aprendido en la sección "Propiedades geométricas" para encontrar la altura de la catedral, ¡sin ayuda de internet!

Como lo muestra el diagrama, alguno de los integrantes del equipo (¿cuál de todas las alturas de los integrantes es mejor opción?) se colocará en la explanada de la catedral (o de algún edificio representativo de tu ciudad) para que se proyecte y mida su sombra, asimismo, deberán medir la sombra del edificio en cuestión y aplicar la fórmula necesaria para encontrar su altura.

1. ¿Qué datos son necesarios?
2. ¿Qué fórmula obtienen para encontrar la altura del edificio?
3. ¿Cómo pueden expresar dicha fórmula en ecuación?
4. ¿La ecuación resultante en el paso 3 es lineal o cuadrática?
5. ¿Se obtiene el mismo valor si se toma como referencia a otro integrante de su equipo?
6. Si la respuesta al paso 5 es sí o no, ¿por qué crees que haya resultado así?

Presenten su trabajo con portada, indiquen los pasos que siguieron, el diagrama de cómo lo hicieron, anexen fotografías y expongan ante el grupo.

Matemáticas, ¿para qué?

La pregunta más común en una clase de matemáticas es: ¿y eso para qué me va a servir? Para justificar, en parte, la poca comprensión que se tiene del tema que se está viendo, como si al encontrar la respuesta, el tema llegara a ser comprensible.

Mucha de la teoría matemática no tiene una aplicación práctica hasta ahora, sin embargo no quiere decir que sea inútil o innecesaria.

Te invitamos a seguir estudiando y tal vez, algún día encuentres una utilidad trascendente a eso que ahora te parece extraño y ajeno.

Hacia la prueba Planea

Utiliza esta sección para preparar tu prueba Planea.

1. La pendiente de una recta representa:
   a. *m*
   b. una ecuación lineal
   c. una razón
   d. una constante proporcional

2. Evalúa $f(x) = x^2 - x + 1$ en $-y$
   a. $-y^2 - y + 1$
   b. $y^2 - y + 1$
   c. $y^2 + y + 1$
   d. $-y^2 + y + 1$

3. Se tienen dos cantidades que satisfacen la siguiente relación: $2x : 3 :: 3 : 4y$. ¿qué tipo de proporción cumplen?
   a. Directa
   b. Inversa
   c. Compuesta
   d. Doble

4. La tasa de cambio de la función $f(x) = -2x + 6$ indica que el comportamiento es:
   a. Creciente en uno por cada unidad de x
   b. Decreciente en uno por cada unidad de x
   c. Creciente en dos por cada unidad de x
   d. Decreciente 2 a por cada unidad en x

5. ¿En cuánto tiempo llegará un autobús que salió de un paradero a 50 km viajando a una velocidad constante de 60 km/h?
   a. 25 minutos
   b. 50 minutos
   c. 1 hora y 15 minutos
   d. 1 hora y 40 minutos

6. Para construir una casa en ocho meses se contrataron a 3 albañiles, ¿Cuántos serán necesarios para construir la casa en tres meses?
   a. 9
   b. 8
   c. 7
   d. 6

7. La sombra proyectada por un árbol mide 6 m, si a la misma hora un niño de 1.5 m proyecta una sombra de 3 m, ¿Cuánto mide el árbol?
   a. 2 metros y medio
   b. 3 metros
   c. 3 metros y medio
   d. 4 metros

8. La multiplicación de $P(x) = 2x - 1$ y $Q(x) = x + 3$ restada con $R(x) = 5x$ resulta:
   a. $2x^2 + 5x - 3$
   b. $2x^2 - 5x - 3$
   c. $2x^2 - 3$
   d. $2x^2 - 10x - 3$

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Explicar el algoritmo de la regla de tres con más de un argumento. Actividad 2.	Presentas información verídica, clara y basada en una investigación profunda.		
	Ejemplificas correctamente las situaciones requeridas.		
	La explicación en la diferencia del uso de la regla de tres es clara y suficiente.		
Construir unidades de medida a partir de establecer una relación específica entre magnitudes. Actividad 10.	Resuelves correctamente los problemas.		
	Tu investigación cuenta con información confiable y los datos corresponden a lo solicitado.		
	Muestras las tablas de conversión de manera ordenada, limpia y coherente, favoreciendo la interpretación de las mismas.		

Rúbrica

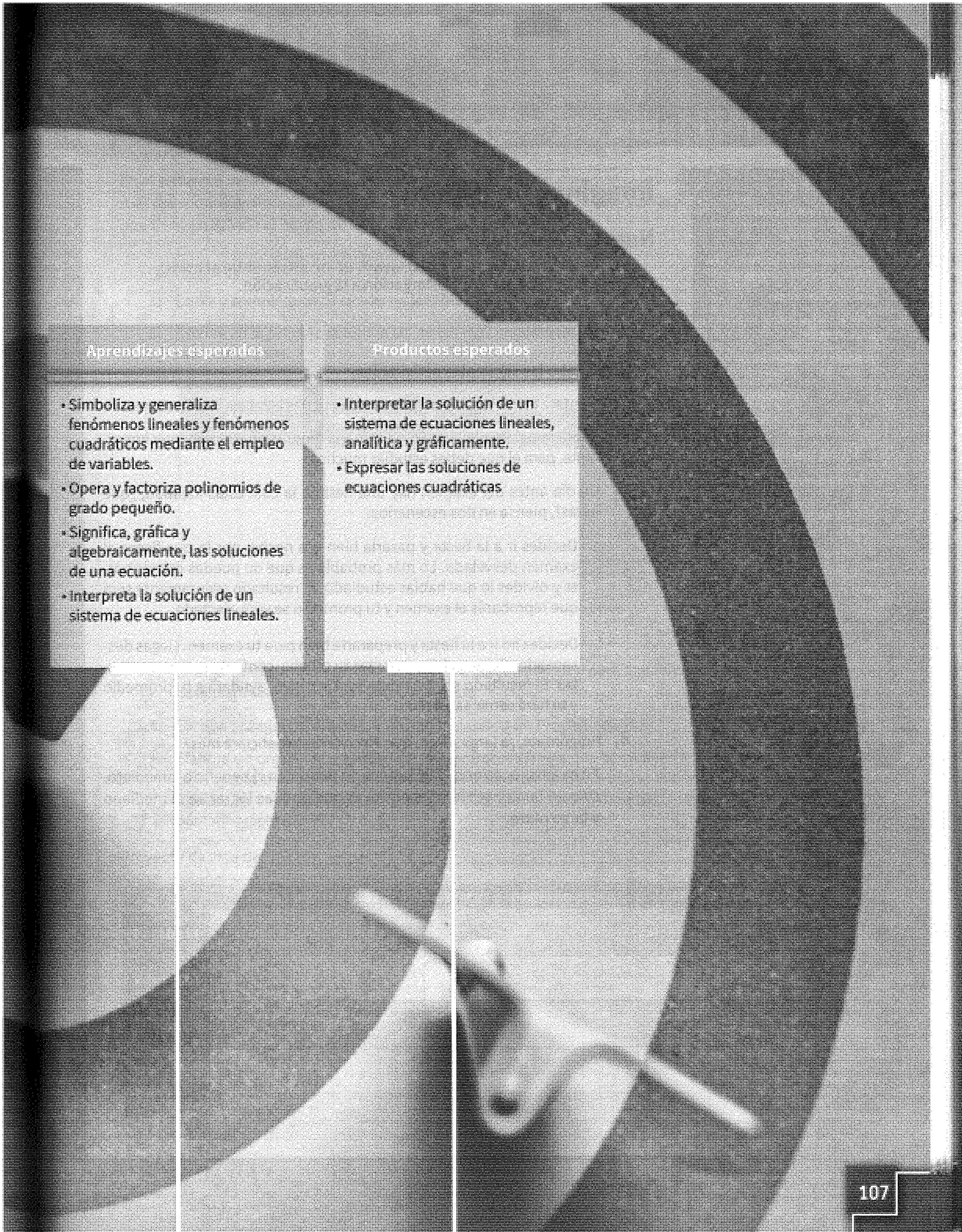
Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Expresa de forma coloquial y escrita, fenómenos de proporcionalidad directa de su vida cotidiana con base en prácticas como; comparar, equivaler, medir, construir unidades de medida, entre otras.	Expreso fenómenos de proporcionalidad directa de forma clara y directa.	Utilizo formas equivalentes para mejorar la comprensión de mis expresiones.	Entiendo los fenómenos que dan lugar a la proporcionalidad directa y puedo relacionarlos en un vocabulario coloquial.
Caracteriza una relación proporcional directa.	Identifico los elementos de una proporción directa.	Utilizo correctamente las proporciones en la resolución de problemas.	Entiendo y analizo correctamente las proporciones en diferentes formatos.
Resignifica en contexto al algoritmo de la regla de tres simple.	Entiendo la relación entre el algoritmo de la regla de tres y la relación proporcional.	Elaboro la ecuación acorde al problema e identifico la solución de un fenómeno proporcional.	Puedo predecir el resultado de un fenómeno utilizando los datos necesarios y reproducir su comportamiento.
Expresa, de manera simbólica, fenómenos de naturaleza proporcional en el marco de su vida cotidiana.	Encuentro la relación proporcional en las situaciones que me rodean.	Comparo las relaciones existentes, encuentro patrones y busco sus características.	Utilizo de manera indiscriminada pero consciente la mejor forma para la representación de un problema.

Tercer parcial

Eje: Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico

Componentes	Contenidos centrales	Contenidos específicos
• Patrones, simbolización y generalización: elementos del álgebra básica.	• Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (normalmente cuadrático). • El trabajo simbólico. • Representación y resolución de sistemas y ecuaciones lineales.	• Operaciones con polinomios y factorizaciones básicas de trinomios (productos notables). Se sugiere apoyarse de los modelos geométricos materiales y simbólicos) para el cuadrado del binomio. • Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, en estrecha conexión con la función lineal: ¿qué caracteriza al punto de intersección?, ¿siempre existe solución? • Ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática. Interpretación geométrica y algebraica de las raíces. Tratamiento transversal con el tiro parabólico y los máximos y mínimos de una función cuadrática. ¿cómo se interpreta la solución de una ecuación lineal y las soluciones de una ecuación cuadrática?



Aprendizajes esperados	Productos esperados
• Simboliza y generaliza fenómenos lineales y fenómenos cuadráticos mediante el empleo de variables. • Opera y factoriza polinomios de grado pequeño. • Significa, gráfica y algebraicamente, las soluciones de una ecuación. • Interpreta la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	• Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, analítica y gráficamente. • Expresar las soluciones de ecuaciones cuadráticas

Para reflexionar...

¿Qué opinas de la frase "No dejes para mañana lo que puedes hacer hoy"?

Para ti hoy ¿Qué es lo más importante?

¿Cuáles son tus metas?

Para terminar...

¿Cómo seré una mejor persona?, ¿cómo seremos una mejor comunidad?

Siempre que debemos tomar una decisión, es importante que podamos identificar al menos dos escenarios posibles y analizar las consecuencias de ambas decisiones. Al final, ¿qué te hará sentir mejor a largo plazo?

Imagina que esperas

Nuestro objetivo

Evaluar pros y contras de la postergación a la gratificación.

Lleva a cabo las siguientes actividades.

1. Siéntate en un lugar tranquilo donde puedas estar sin distracciones.
2. Ahora imagina que la próxima semana tendrás un examen muy importante, para el que debes estudiar mucho.
3. Un día antes del examen hay una fiesta a la cuál estás invitado, ¿qué harás?, piensa en dos escenarios:

   Decides ir a la fiesta y pasarla bien esa noche, por lo que llegas al examen desvelado. Lo más probable es que no puedas concentrarte y olvides lo que habías estudiado. El resultado seguramente será que reprobarás el examen y tu promedio se verá afectado.

   Decides no ir a la fiesta y prepararte bien para tu examen. Llegas descansado a la escuela y presentas tu prueba, confiado en tus respuestas. El resultado seguramente será positivo, ayudará a tu promedio y te hará sentir satisfecho.

4. Pregúntate, ¿a largo plazo, qué elección te beneficiará más?

   En muchas ocasiones vale la pena no pensar en el beneficio inmediato, sino en las consecuencias positivas que podrías lograr en el mediano y largo plazo.

Proyecto de vida

En el semestre desarrollaremos tu Proyecto de vida, con la finalidad de clarificar qué deseas para ti y tomes decisiones que marquen la dirección de tu futuro, así como reflexionar acerca de las implicaciones que tiene en tu vida el hecho de llevarlo a cabo.

Organiza la información de tu Proyecto de vida.

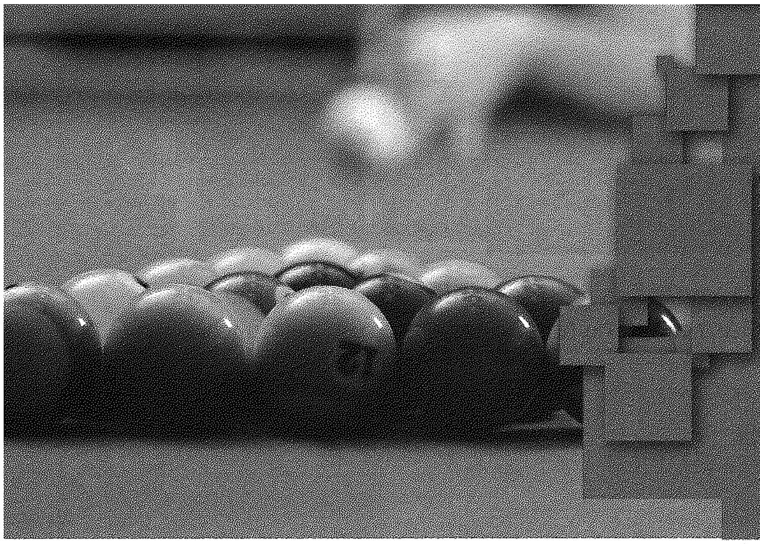
1. Copia y completa en tu cuaderno la tabla.
2. Escribe en la primera columna las metas más importantes que deseas lograr. Agrega las filas que sean necesarias.

Meta	Ideas importantes a rescatar	Acciones que debo realizar	Beneficios que representa para mí	Beneficios que representa para mi entorno

3. Ya organizada la información en la tabla, léela con atención para tener un panorama de qué implica el planteamiento de tu Proyecto de vida.
4. Escribe por qué consideras importante elaborar un Proyecto de vida.
5. Elabora un organizador gráfico donde incorpores frases que te motiven a trabajar día con día en tu Proyecto de vida, incluye tus metas para tenerlas presentes todo el tiempo. Coloca este organizador en un lugar visible en tu casa. Utiliza este esquema para hacer un esbozo y enriquécelo paulatinamente.

Proyecto de vida de: ______________________________

	Metas a corto plazo	Metas a mediano plazo	Metas a largo plazo
Personal			
Familiar			
Escolar			
Laboral			
Social			



Representación y resolución de sistemas de ecuaciones

Para saber más

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron resueltos en la antigüedad por los babilonios.

Los griegos los resolvían usando métodos geométricos.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en estrecha conexión con la función lineal

Hasta ahora has comprobado la conexión existente entre las ecuaciones lineales y los problemas cotidianos; has encontrado la solución de una incógnita en dichas ecuaciones y has trabajado con situaciones que se representan con una ecuación y una incógnita, pero si te decimos que existen problemas cuya representación algebraica son dos o más ecuaciones y que por ende tienen dos o más incógnitas, ¿nos creerías? ¡Sabemos que sí!

Un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Donde los números reales $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ son los coeficientes; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las incógnitas y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ los términos independientes.

Por tanto, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se ve de esta forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, son los coeficientes; b_1, b_2 los términos independientes y x_1, x_2 las incógnitas o variables.

Si renombramos a las incógnitas x_1, x_2 como x y y respectivamente, obtenemos una expresión del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\}.$$

Donde a, b, c, d, e, f, pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$.

Llamamos a los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.

Estos sistemas están expresados en la forma implícita de la ecuación de la recta, esto se aprecia mejor como:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by-c=0 \\ dx+ey-f=0 \end{array}\right\}.$$

Ahora, si suponemos x como la variable independiente y $y = f(x)$ como la variable dependiente, el sistema de ecuaciones de 2×2 se expresa con la forma explícita de la ecuación de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=y=(-\frac{a}{b})x+\frac{c}{b} \\ f(x)=y=(-\frac{d}{e})x+\frac{f}{e} \end{array}\right\}.$$

Donde $m=-\frac{a}{b}$ y $m=-\frac{d}{e}$ son las pendientes de cada recta, respectivamente. Pero ese signo negativo que ves en cada expresión de las pendientes, no asegura que "siempre el valor de la pendiente será negativo", ¿por qué? Recuerda que los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{e}$ son números reales, así tendríamos:

1. Si $\frac{a}{b}>0$, entonces $-\frac{a}{b}<0$.
2. Si $\frac{a}{b}<0$, entonces $-\frac{a}{b}>0$.
3. Si, $\frac{a}{b}=0$ con $b \neq 0$, entonces $-\frac{a}{b}=0$.

Análogamente para la pendiente $-\frac{d}{e}$.

Los sistemas de ecuaciones son de gran importancia en las ciencias, como física, matemáticas, química, etcétera.

También nos permiten representar diversas situaciones y nos ayudan a relacionar condiciones para ambas variables x y y. En el caso de un sistema de ecuaciones de 2×2, los problemas pueden ir de lo más sencillo a lo complejo, pero siempre se buscará relacionar a las dos ecuaciones y encontrar el valor que satisfacen ambas.

Para saber más

Una variable vista como número generalizado no nos da mucha información del número, por eso a no significa que el número es positivo, y $-a$ no implica que es negativo, por ejemplo, si $a = -1$, $-a = -(-1) = 1$.

Veamos algunos problemas que dan lugar a sistemas de 2×2:

Ejemplos

Encontraremos dos números cuya suma sea 24 y cuya resta sea 6.

Para este problema, pongamos a x como el primer número y a y como el segundo.

La primera solicitud es que la suma dé como resultado 24, por tanto: $x + y = 24$.

La segunda condición es que la resta sea 6, así tenemos: $x - y = 6$.

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones que representa esta situación es:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=24 \\ x-y&=6 \end{aligned}\right\}$$

Los números que satisfacen el sistema son: $x = 15$ y $y = 9$.

La mamá de Gabriel le compró algunos útiles. Pagó $50 por 3 lapiceros y 5 lápices. Por su parte, el papá de Ale adquirió 5 lapiceros y 7 lápices con precio de $74, comprando en la misma tienda que la mamá de Gabriel.

Analicemos los datos para contestar ¿Cuál es el precio de cada lapicero y cada lápiz, si el precio no varía en cada compra?

Cantidad	Expresión del costo	Cantidad	Expresión del costo
Un lapicero	x pesos	Un lápiz	y pesos
Tres lapiceros	$3x$ pesos	Cinco lápices	$5y$ pesos
Cinco lapiceros	$5x$ pesos	Siete lápices	$7y$ pesos

Con la información de la tabla conseguimos:

La mamá de Gabriel pagó $3x + 5y = 50$, mientras que el papá de Ale gastó $5x + 7y = 74$.

El sistema de ecuaciones resultante es:

$$\left.\begin{aligned} 3x+5y&=50 \\ 5x+7y&=74 \end{aligned}\right\}.$$

Cada lapicero cuesta 5 pesos, mientras que un lápiz cuesta 7 pesos.

3. Una empresa extrae mineral de dos minas. El mineral de la mina A contiene 1 % de níquel y 1 % de cobre, pero en la mina B es 2 % de níquel y 5 % de cobre.

¿Qué cantidad de mineral se deberá extraer de cada mina para lograr 3 toneladas de níquel y 7 toneladas de cobre?

Extracciones	Expresión del peso	Extracciones	Expresión del peso
Mineral mina A	x	Mineral mina B	y
Níquel mina A	$0.01x$	Níquel mina B	$0.02y$
Cobre mina A	$0.01x$	Cobre mina B	$0.05y$

Con la información de la tabla tenemos que de ambas minas desean extraerse 3 toneladas de níquel, que representamos como $0.01x + 0.02y = 3$.

Del mismo modo, se quieren obtener 7 toneladas de cobre, así $0.01x + 0.05y = 7$.

La cantidad de toneladas que se debe extraer de cada mina está representada por el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 0.01x+0.02y=3 \\ 0.01x+0.05y=7 \end{array}\right\}.$$

Concluimos que deberán extraerse 33.33 toneladas de la mina A y 133.33 de la mina B.

4. Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente 3 y 6 toneladas, se hicieron 12 viajes para transportar 60 toneladas. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

Tipo de camión	Dato	Tipo de camión	Dato
Camión A	x viajes	Camión B	y viajes
Camión A	$3x$ toneladas	Camión B	$6y$ toneladas

De la tabla inferimos: Se harán x viajes del camión A y y viajes del camión B, en total doce, esto es $x + y = 12$. El camión A transporta tres toneladas por viaje, el camión B seis, se desean trasladar 60 toneladas: $3x + 6y = 60$. El número de viajes se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ 3x+6y=60 \end{array}\right\}.$$

Se necesitarán 4 viajes del camión A y 8 del camión B.

Como lo habrás notado, todo se resume en encontrar los valores de ambas variables, en las próximas secciones te enseñaremos diversos métodos para solucionar estos sistemas.

Actividad

Escribe el sistema de ecuaciones que represente cada situación.

1. La edad de Pepe y su tío suman 27 años y dentro de 4.5 años la edad del tío de Pepe será el doble de la edad de Pepe.
2. Encuentra dos números cuya suma es 25 y su resta es 9.
3. El costo de las entradas a una premier es de \$80 adultos y \$30 niños. Asistieron 348 personas y se recaudaron \$7 980, ¿cuántos adultos y cuántos niños eran?
4. El jardín de Ana tiene forma rectangular, el perímetro es de 40 metros. Si Ana duplica el largo y aumenta en 4 m el ancho, el perímetro queda en 60 metros. ¿Cuáles son las medidas del jardín de Ana y cuáles las medidas del nuevo?

Interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}\right\}.$$

Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtenemos dos rectas de ecuaciones:

$$ax+by-c=0$$

$$dx+ey-f=0$$

Por consiguiente, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está representado geométricamente por dos rectas.

Aquí hay una relación funcional (una variable dependerá de otra), usualmente consideramos a y la variable dependiente, cuyo valor se obtendrá despejándola y asignando valores a la variable dependiente, que en nuestro caso será x. Así construimos una tabla que podemos ubicar en el plano cartesiano usando las coordenadas (x, y) para cada valor asignado y encontrado.

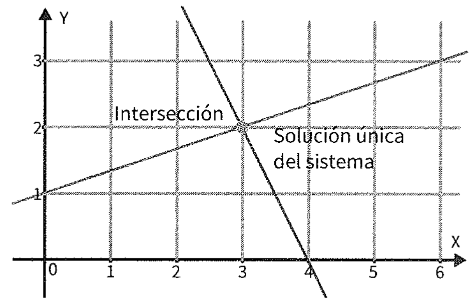
¿Cómo son esas rectas?

Si estudiamos las posiciones relativas de las dos rectas en el plano, encontramos la solución del sistema dependiendo del lugar que ocupen las rectas.

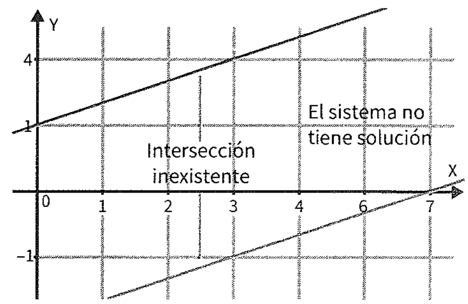
Imagina que tienes dos rectas cualesquiera en el plano cartesiano, ¿cómo las imaginas? ¿Se juntan en algún punto? ¿No se tocan? ¿Probablemente son la misma?

Dado un sistema de ecuaciones de 2×2, es decir, de dos ecuaciones con dos incógnitas cada una, éste tendrá una y solo una de las interpretaciones geométricas:

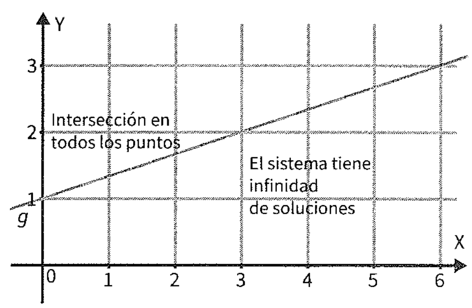
1. Ambas rectas se cortan en algún punto: Para estos sistemas hay una única solución que es el punto de intersección de ambas rectas.



2. Las rectas son paralelas: Las rectas no se tocan en ningún punto.



3. Ambas rectas se superponen: Es decir, la ecuación representa a la misma recta.



Resolver un sistema de ecuaciones equivale a encontrar los puntos del plano comunes de ambas rectas, si los hay.

Recordemos que para graficar una recta $y = mx + b$, asignamos y sustituimos valores a la variable independiente x y despejamos el valor de la variable dependiente y.

Observa que para trazar una recta no es necesario tabular una gran cantidad de puntos, de geometría sabemos que por dos puntos pasa una y solo una recta, es decir, podemos definir a una recta conociendo únicamente dos puntos.

Entonces, para graficar una recta, basta encontrar dos puntos cualesquiera que satisfagan la ecuación y unirlos.

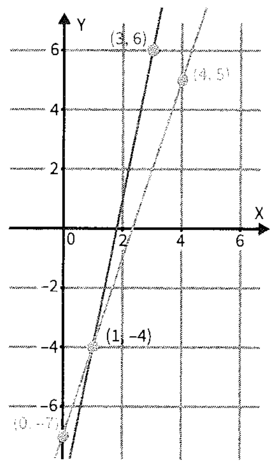
De este modo podrás hallar visualmente la solución al sistema, si es que la tiene.

Ejemplos

1. Graficaremos en el mismo plano las dos rectas que aparecen en el sistema de ecuaciones para hallar la solución:

$$\left.\begin{array}{r}10x-2y-18=0\\ -3x+y+7=0\end{array}\right\}.$$

$10x - 2y = 18$ implica $y = \frac{-10x+18}{-2}$, mientras que $-3x + y = -7$ implica $y = 3x - 7$.



$y = 5x - 9$		
x	y	punto
1	−4	(1, −4)
3	6	(3, 6)

$y = 3x - 7$		
x	y	punto
0	−7	(0, −7)
4	5	(4, 5)

Como ves en la gráfica, ambas rectas se cortan en un punto, ¿cuál?

¡Le atinamos al punto de intersección! Que es (1, −4).

Esto quiere decir que la única solución para el sistema es: $x = 1$ y $y = -4$.

Verifiquemos que el resultado satisface ambas ecuaciones:

$10x - 2y - 18 = 10(1) - 2(-4) - 18 = 10 + 8 - 18 = 0$

$-3x + y + 7 = -3(1) + (-4) + 7 = -3 - 4 + 7 = 0$

Por tanto, la única solución al sistema $\left.\begin{array}{r}10x-2y-18=0\\ -3x+y+7=0\end{array}\right\}$ es el punto (1, − 4).

2. Resolvamos y grafiquemos el siguiente sistema:

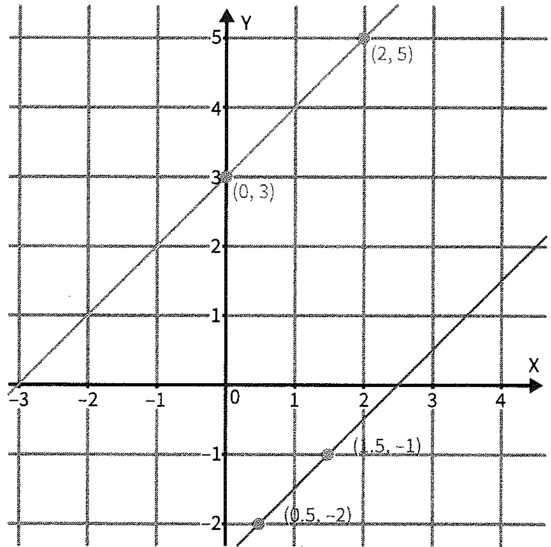
$$\left.\begin{array}{r}2x-2y=-6\\ x-y=2.5\end{array}\right\}.$$

Despejamos la misma variable en ambas ecuaciones y tabulamos, vale la pena recordar que es conveniente reducir las expresiones a su expresión más simplificada. Así tenemos:

$2x - 2y = -6$ implica $y = \frac{-2x-6}{-2}$, mientras que $x - y = 2.5$ implica $y = x - 2.5$.

$y = x + 3$		
x	y	punto
0	3	(0, 3)
2	5	(2, 5)

$y = x - 2.5$		
x	y	punto
1.5	–1	(1.5, –1)
0.5	–2	(0.5, –2)



Su gráfica representa dos líneas paralelas. El sistema no tiene solución.

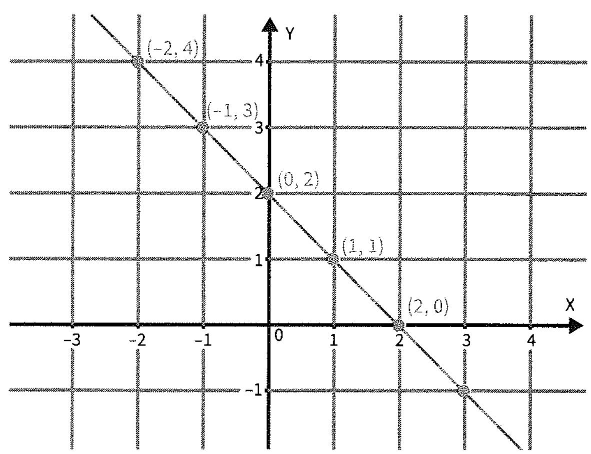
3. Solucionemos gráficamente el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}\right\}.$$

$x + y = 2$ implica $y = -x + 2$, mientras que $3x - 3y = 6$ implica $y = \frac{-3x+6}{3}$.

$y = -x + 2$		
x	y	punto
0	2	(0, 2)
1	1	(1, 1)

$y = -x + 2$		
x	y	punto
2	0	(2, 0)
3	–1	(3, –1)



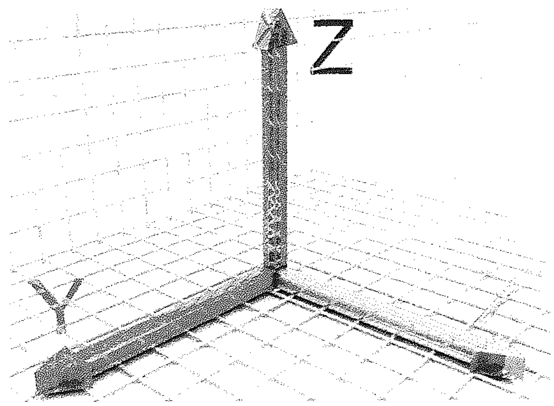
El sistema tiene una infinidad de soluciones, puesto que ambas rectas se superponen. Ejemplos de soluciones del sistema: (–2, 4), (–1, 3), (0, 2), (1, 1), (2, 0) y (3, –1).

Para sistemas de ecuaciones con más de dos variables no es posible aplicar de la misma forma la representación gráfica, o al menos no en el plano cartesiano.

Recuerda que la variable x representa los valores del eje de las abscisas y los valores de y representan al eje de las ordenadas, por tanto, si agregamos una variable más, estaríamos en la tercera dimensión, y si agregamos una más estaríamos en la cuarta dimensión y así sucesivamente.

La tercera dimensión la conoces muy bien pues ¡es donde vivimos! Tan fácil como mirar una esquina de tu casa o tu cuarto, observa que esta se conforma por tres líneas.

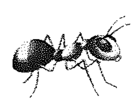
La tercera dimensión tiene tres ejes, eje X, eje Y y eje Z, como se muestra en la imagen:



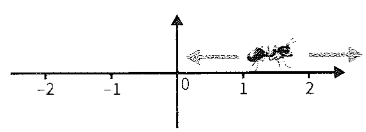
Nosotros tenemos volumen, sin embargo, en la segunda dimensión no.

Expongamos otra situación.

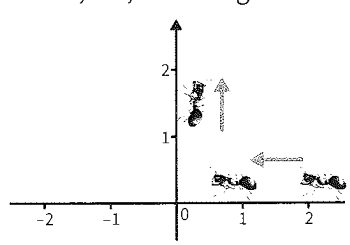
¡Imagina una hormiga!



En la dimensión uno, la hormiga podría moverse hacia adelante sin poder dar vuelta o puede ir hacia atrás, igual sin poder dar vuelta.

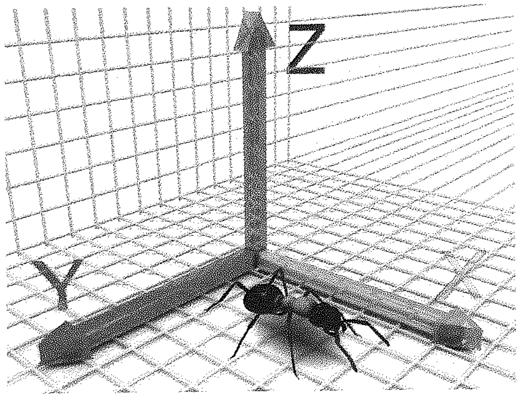


La dimensión dos es el plano cartesiano, ahí, la hormiga tiene más espacio para avanzar:



Entonces puede ir en las cuatro direcciones que marcan los puntos cardinales: norte, sur, este y oeste, sin embargo no pueden subir ni bajar, pues se encuentran en un plano.

¡Y claro! En la dimensión tres, la hormiga camina cuantas veces quiera, da la vuelta, regresa o busca otro camino, como lo hacemos nosotros.



Hasta ahora te proporcionamos las soluciones sin más, te parecerá extraño, pero el propósito era que pudieras identificar los problemas que se resuelven mediante un sistema de ecuaciones, además necesitabas recordar que cada ecuación representa una recta en el plano y resolver el sistema equivale a encontrar el punto de intersección de ambas rectas, visualizar si no tienen puntos en común o si las ecuaciones representan a la misma recta.

En el tema siguiente te mostraremos métodos para solucionar sistemas de 2×2, presta atención, pues pueden ser útiles para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Actividad de aprendizaje 2

Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina los valores de a y b en el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 2x-4y=0 \\ -ax+y=b \end{array}\right\}$, de tal modo que las rectas resultantes tengan:

   a. Un punto en común.

   b. Ningún punto en común.

   c. Todos los puntos en común.

2. Analiza y resuelve los sistemas, si es posible.

   a. $\left.\begin{array}{r} 3y+2x=11 \\ y+\frac{2}{3}x=\frac{11}{3} \end{array}\right\}$

   b. $\left.\begin{array}{r} -x+2y=-3 \\ 2x-3y=3 \end{array}\right\}$

   c. $\left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ 3x+3y=4 \end{array}\right\}$

   d. $\left.\begin{array}{r} 5x-2y=10 \\ x+3y=2 \end{array}\right\}$

   e. $\left.\begin{array}{r} x+3y=3 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$

   f. $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=0 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\}$

Métodos de solución

Además de la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, existen otros métodos que nos ayudan a encontrar la solución, si existe, de un sistema de ecuaciones.

En esta sección te presentaremos cuatro métodos más:

- Método de sustitución
- Método de reducción.
- Método de igualación.
- Método de Cramer.

De los cuatro métodos antes mencionados, primero veremos el de sustitución, que busca despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a la otra ecuación, obteniendo un sistema asociado al primero pero con una ecuación menos.

El método consiste en:

1. Despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones.
2. Sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación y despejar.
3. Sustituir el valor resultante en el paso anterior en la ecuación del primer paso.

Ejemplo

Resolveremos el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 3x+y=18 \end{array}\right\}$.

- Despejamos la variable x en la primera ecuación: $x = 2 + y$.
- Sustituimos el valor de x obtenido de la primera ecuación, en la segunda y operamos:

  De $3x + y = 18$, obtenemos $3(2 + y) + y = 18$; distribuyendo, $6 + 3y + y = 18$; sumamos términos semejantes, $6 + 4y = 18$; despejamos y, $4y = 18 - 6 = 12$, dividimos entre 4 y obtenemos $y = 3$.
- Sustituimos el valor de y en la primera ecuación despejada ($x = 2 + y$) para hallar el valor de x, esto nos da: $x = 2 + y = 2 + 3 = 5$.

Por lo tanto, el sistema tiene una única solución en $x = 5$ y $y = 3$.

Procedemos a verificar:

$$\left.\begin{array}{r} 5-3=2 \\ 3(5)+3=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 15+3=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 18=18 \end{array}\right\}$$

¡Ya está!

El método de reducción consiste en:

1. Multiplicar las ecuaciones por un valor de manera que al sumar las ecuaciones se elimine alguna de las incógnitas.
2. Sumamos ambas ecuaciones.
3. Despejamos la variable que no se eliminó para encontrar su valor y sustituimos en cualquier ecuación para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo

Juan guardó en un garrafón 357 monedas de \$10 y de \$5, el valor total es de \$3 160. Con la información dada, procedemos a responder ¿Cuántas monedas de \$10 y \$5 juntó?

Representemos con x el número de monedas de \$10 y con y el número de monedas de \$5, así, el sistema que describe esta situación es:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=357 \\ 10x+5y&=3160 \end{aligned}\right\}.$$

- Para eliminar la variable x, nos conviene multiplicar por −10 a la primera ecuación:

$$\left.\begin{aligned} -10(x+y)&=-10(357) \\ 10x+5y&=3160 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -10x-10y&=-3570 \\ 10x+5y&=3160 \end{aligned}\right\}$$

- Realizamos la suma de las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -10x-10y=-3570 \\ \underline{10x+5y\;=\;\;3160} \\ -5y=\;\;-410 \end{array}$$

- Despejamos y para encontrar su valor y la sustituimos en alguna ecuación.

  Dividimos entre −5 en ambos miembros de la ecuación $-5y=-410$ y obtenemos $y=82$; sustituimos en la primera ecuación $(x+y=357)$, $x+(82)=357$; despejamos x para obtener su valor $x=357-82=275$.

Por lo tanto la solución del sistema es $x=82$ y $y=275$.

Verificamos:

$$\left.\begin{aligned} 275-82&=357 \\ 10(275)+5(82)&=3160 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 357&=357 \\ 2750+410&=3160 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 357&=357 \\ 3160&=3160 \end{aligned}\right\}$$

¡Listo! Juan juntó 82 monedas de \$10 y 275 de \$5.

Para el método de igualación estos son los pasos:

1. Despejamos de cada ecuación la misma incógnita, elige una incógnita tomando en cuenta que se debe hacer lo menos complicado posible.
2. Igualamos ambas expresiones obtenidas en el paso 1 y operamos para reducir y despejar la incógnita.
3. Sustituimos el valor de la incógnita encontrada en el paso 2, en cualquiera de los dos despejes del paso 1. Operamos y hallamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo

En una granja, Luisa cría gallinas y vacas, si al contar las cabezas son 120, y al contar las patas, tiene un total de 380, ¿cuántas gallinas y vacas son?

Representamos con x al número de gallinas y utilizamos la variable y para representar el número de vacas, entonces tenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=120 \\ 2x+4y&=380 \end{aligned}\right\}.$$

Aplicamos el método de igualación:

Elegimos despejar x en ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=120 \\ 2x+4y&=380 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=120-y \\ x&=\frac{380-4y}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=120-y \\ x&=190-2y \end{aligned}\right\}$$

Igualamos ambas ecuaciones y operamos:

Como $x = x$, entonces igualamos $120 - y = 190 - 2y$; sumamos $2y$ de ambos lados y restamos 120, obteniendo $2y - y = 190 - 120$; esto resulta en $y = 70$.

Sustituimos el resultado anterior en alguna de las variables despejadas al inicio:

Decidimos sustituir en la primera ecuación ($x + y = 120$), o sea, $x + (70) = 120$ y despejamos, así $x = 120 - 70 = 50$.

Tenemos que x = 50 y y = 70. Verificando:

$$\left.\begin{aligned} 50+70&=120 \\ 2(50)+4(70)&=380 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 120&=120 \\ 100+280&=380 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 120&=120 \\ 380&=380 \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, ¡Luisa tiene 50 gallinas y 70 vacas!

Antes de presentarte el método de Cramer, es necesario introducir la expresión matricial de un sistema de ecuaciones 2×2 y definir una multiplicación de matrices.

Para fines prácticos, únicamente definiremos la multiplicación de una matriz de dos renglones y dos columnas por una de dos renglones y una columna, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_1+a_{12}\cdot b_2 \\ a_{21}\cdot b_1+a_{22}\cdot b_2 \end{pmatrix}$$

Nota que el resultado de la multiplicación es una matriz de dos renglones y una columna.

En general, una matriz de m renglones y n columnas sólo se puede multiplicar por otra de n renglones, digamos, de n renglones y p columnas; la matriz final tendrá m renglones y p columnas.

Trabajemos este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}\right\}.$$

Su representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}.$$

La primera matriz tiene dos filas (renglones) y dos columnas y la segunda dos filas y una columna.

Si queremos verificar que la matriz representa al sistema de ecuaciones basta con hacer la multiplicación de matrices como la definimos. Así:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ dx+ey \end{pmatrix}.$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}.$$

Entonces surge la igualdad que da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}$$

Así, nos aseguramos que la representación matricial coincide con el sistema de ecuaciones, esto nos permite trabajar con una matriz para hallar la solución de un sistema de ecuaciones y viceversa.

La representación matricial aumentada consiste en la matriz de los coeficientes del sistema, agregando la columna de los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right).$$

Por tanto, la matriz aumentada es de dos renglones y de tres columnas.

El subíndice indica la posición del elemento, por ejemplo, a_{34} es el elemento que se encuentra en el tercer renglón y la cuarta columna, mientras que a_{41} está en el cuarto renglón y la primera columna.

La primera será la columna de la variable x o x_1, la segunda será la de la variable y o x_2 y la tercera será la de los términos independientes o b.

El determinante de una matriz de dos columnas y dos filas, denotado por det, se obtiene de esta forma:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

Para aplicar la regla de Cramer necesitaremos calcular tres determinantes:

Primero.

De la matriz de coeficientes, Δ. Se determina utilizando las columnas x y y.

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a\cdot e - d\cdot b.$$

Segundo.

De la matriz de coeficientes, reemplazando la primera columna (x) por la de los términos independientes (b), Δx. Se calcula con las columnas b y y, en ese orden.

$$\Delta x = \det\begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c\cdot e - f\cdot b.$$

Tercero.

De la matriz de coeficientes, sustituyendo la segunda columna (y) por la de los términos independientes (b), Δy. Se obtiene con las columnas x y b, en ese orden.

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a\cdot f - d\cdot c.$$

Deberás entender muy bien los reemplazos y el orden en el determinante, pues es fundamental para la regla de Cramer.

¡Estamos listos para dar los pasos de la regla de Cramer!

1. Calcula los determinantes necesarios, recuerda que son tres, el determinante de la matriz de coeficientes (Δ) y los dos obtenidos sustituyendo en cada columna.
2. Obtenemos el valor de x dividiendo el determinante (Δx) entre el principal (Δ):
$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}.$$
3. Dividimos el determinante (Δy) entre el principal (Δ) para hallar el valor de y:
$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}.$$

Ejemplo

Para un día de campo, Pablo y sus amigos compraron tortas y refrescos en el puesto de doña Leti. Fueron 12 tortas y 16 refrescos por un total de $216.

Poco después, Pablo fue con su familia al puesto de doña Leti, pues las tortas resultaron deliciosas, y consumieron 16 tortas y 22 refrescos por un total de $292. Si deseas ir al puesto de doña Leti por unas ricas tortas y le preguntas a Pablo: ¿cuánto cuestan cada torta y cada refresco? ¿Qué te contestará? Suponiendo que el precio no ha variado.

Pongamos x como el precio de cada torta y denotemos con y el precio de cada refresco.

Con la información anterior, obtenemos este sistema:

$$\left.\begin{aligned}12x+16y=216\\16x+22y=292\end{aligned}\right\}.$$

La matriz ampliada resulta $\left(\begin{array}{cc|c}12 & 16 & 216\\16 & 22 & 292\end{array}\right)$. Aplicamos regla de Cramer:

- Calculamos los determinantes necesarios.

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}12 & 16\\16 & 22\end{pmatrix}=12\cdot22-16\cdot16=264-256=8$$

$$\Delta x=\det\begin{pmatrix}216 & 16\\292 & 22\end{pmatrix}=216\cdot22-292\cdot16=4752-4672=80$$

$$\Delta y=\det\begin{pmatrix}12 & 216\\16 & 292\end{pmatrix}=12\cdot292-16\cdot216=3504-3456=48$$

Para saber más

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, además, el determinante formado por las incógnitas debe ser distinto de cero.

Obtenemos el valor de x.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{80}{8}=10$$

Calculamos el valor de y.

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{48}{8}=6$$

Verificamos:

$$\left.\begin{array}{r}12(10)+16(6)=216\\16(10)+22(6)=292\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}120+96=216\\160+132=292\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}216=216\\292=292\end{array}\right\}$$

Por lo tanto, el valor de las tortas es de \$10 y de los refrescos es de \$6.

Actividad

Busca el método más adecuado y resuelve los ejercicios.

1. La diferencia de edades de Ana y Luis es de 6 años y el doble de su suma es igual a 76. ¿Qué edad tiene cada uno?
2. En una granja hay cerdos y caballos. El doble de caballos es el número de cerdos y la suma de los cerdos con los caballos es 48. ¿Cuántos cerdos y caballos hay?
3. Dos familias compraron boletos para ir a nadar. La familia Hernández compró un boleto para adulto y cuatro para niño, y pagó \$190; la familia Suárez compró dos boletos para adulto y dos para niño, y pagó \$170. ¿Cuánto cuesta cada boleto?
4. Una fábrica de jabones produce dos modelos. El modelo A contiene 4 g de lavanda por 3 g de aceite de coco; y el modelo B es una mezcla de 2 g de lavanda por 1 g de aceite de coco. Si se tienen 160 g de lavanda y 100 g de aceite de coco, ¿cuántos jabones se pueden hacer de cada modelo?
5. Julia desea poner una valla metálica alrededor de su jardín que es de forma rectangular, ella sabe que su perímetro es de 32 metros. Si el lado mayor es el triple que el menor, ¿cuánto mide cada lado del patio
6. Doña Juana vende tamales a \$12 cada uno y en torta a \$20. En una mañana vendió 32 tamales y recaudó \$352. ¿Cuántos tamales con y sin pan vendió?
7. Encuentra dos números cuya diferencia sea 1 y la suma del triple de uno con el doble de otro es 12.
8. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que otro, ¿Cuánto miden sus tres ángulos?
9. Dos números suman 96 y uno es el doble del otro, ¿Cuáles son esos números?
10. Hallar un número de dos cifras que cumpla que la segunda cifra es el triple de la primera y la suma de las cifras sea 12.
11. Hallar el promedio de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 30 cm y cuyo lado mayor mide el cuádruple de su lado menor.

Actividad de aprendizaje 4

Productos esperados

En esta actividad propondrás un problema que se pueda representar con un sistema de ecuaciones 2×2 y determinarás su solución.

Considera lo siguiente:

1. En binas plantearán un problema de la vida cotidiana.

   Anoten en su cuaderno el proceso a seguir:

   - ¿Qué variables pondrán?,
   - ¿De qué tratará el problema?,
   - ¿Qué datos habrá?

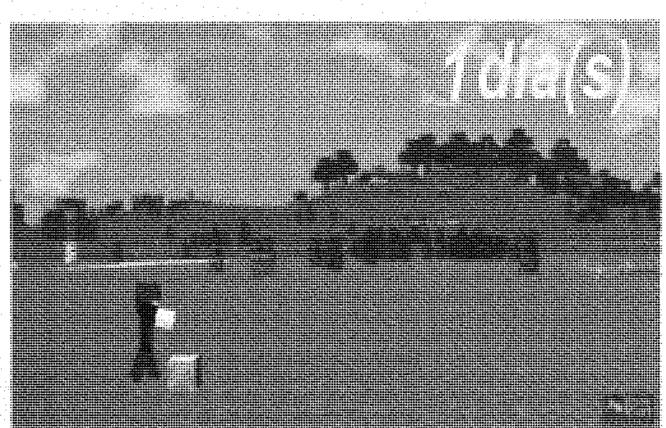
2. Determinarán el sistema de ecuaciones que plantea dicho problema.
3. Resolverán el sistema de ecuaciones con los cuatro métodos de solución. Y harán la gráfica correspondiente. Recuerden verificar sus resultados.
4. Escribirán las ventajas y desventajas que se presentaron en cada uno de los métodos. ¿Cuál método les resultó más efectivo?
5. Organizarán su información de los puntos 1 al 4 para una exposición en clase.

Consideren que es importante compartir las ventajas y desventajas que encontraron en los métodos de resolución de su sistema.

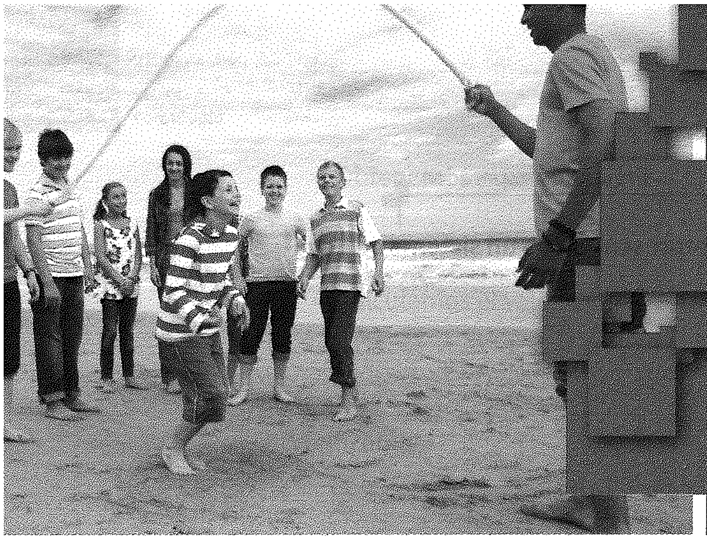
El tiempo máximo de su presentación será de 15 minutos.

Proporcionalidad inversa

En general, el concepto de proporcionalidad inversa o variación inversa es complicado de procesar, pues no se puede hacer uso de la herramienta llamada regla de tres de la misma forma que en el caso de proporcionalidad directa, por lo que te proponemos observar la animación y rescatar la fórmula presentada, la cual te ayudará a entender mejor el concepto y podrás diferenciar entre un tipo y otro.



Recuerda que las tasas, razones y proporciones se ven influenciadas por el comportamiento del fenómeno y dan lugar a variaciones directas o inversas.



Funciones y ecuaciones cuadráticas

Factorizaciones básicas de trinomios

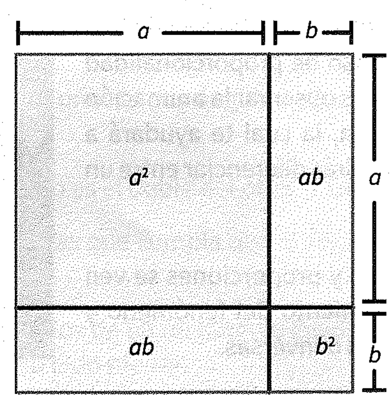
Recuerda que un trinomio es la expresión formada por tres términos. En esta sección conocerás técnicas básicas para factorizar trinomios.

Un tipo particular de trinomio es el trinomio cuadrado en una variable, que está compuesto por un término cuadrático, un término de primer grado y una constante y tiene la forma: $ax^2 + bx + c$.

Ejemplos

1. Los trinomios tienen tres términos:
   - a. $9x^4 + 12x^7 + 4x^{10}$
   - b. $x^3 + 5x^2 - 64x$
   - c. $-3x^7 - \frac{1}{2}x^4 + 9x$
2. Los trinomios cuadrados tienen grado dos:
   - a. $x^2 + 2x - 1$
   - b. $10x^2 - 0.4x + 13$
   - c. $\frac{3}{4}x^2 + x + 4$

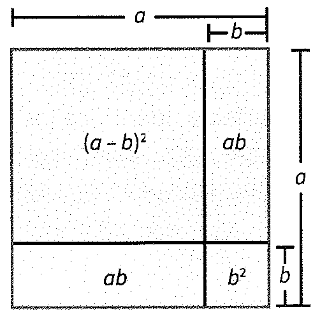
A continuación definiremos algunas identidades notables; estas nos ayudarán a factorizar trinomios. Observa la imagen:



Si deseas obtener su área total, ¿cómo lo harías? ¡Claro! Sumando las áreas correspondientes de las cuatro figuras que la componen, así tenemos:

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer elemento, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, es decir, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ahora, observa la imagen:



¿Cómo obtendrías el área del cuadrado rosa? Recuerda expresarlo con un polinomio.

Bien, observa que el lado del cuadrado rosa mide $a - b$; por tanto, su área es $(a - b)^2$.

Así, el cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer elemento, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Si deseamos calcular el producto de la suma de dos monomios por su diferencia: $(a + b)(a - b)$, desarrollamos el producto y vemos qué sucede:

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2.$$

Concluimos que: una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Ejemplo

Expandiremos las expresiones:

a. $(x^2 + 2x)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(2x) + (2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

b. $(3x^2 - x)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(x) + (x)^2 = 9x^4 - 6x^3 + x^2$

c. $(x^3 + 2x)\ (x^3 - 2x) = (x^3)^2 - (2x)^2 = x^6 - 4x^2$

d. $(-x - 3)^2 = (-x)^2 - 2(-x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$

¡Ahora estamos listos para factorizar un trinomio!

Si un trinomio es resultado de desarrollar alguna identidad notable, podemos volver a dicha identidad y así factorizarlo.

A este tipo de trinomio lo llamamos trinomio cuadrado perfecto. Para identificarlo, toma en cuenta:

1. Dos de sus términos deben ser cuadrados, por tanto ninguno de ellos tendrá signo negativo y es posible extraer su raíz cuadrada.
2. Si multiplicas dos veces las raíces de los números identificados en el primer paso, obtienes el término faltante.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, identifica los términos que están elevados al cuadrado y obtén su raíz cuadrada; usa el signo que se encuentra en el segundo término, por último escribe entre paréntesis la suma o diferencia del primer y segundo términos elevados al cuadrado.

Ejemplo

Factoricemos las expresiones:

- $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = (x + 3)^2$
- $x^2 + 4x + 4 = (x)^2 + 2(x)(2) + (2)^2 = (x + 2)^2$
- $n^2 - 20n + 100 = (n)^2 + 2(n)(10) + (10)^2 = (n - 10)^2$

Recordemos la propiedad distributiva de los números reales $a(b + c) = ab + ac$. A la inversa tenemos $ab + ac = a(b + c)$, este proceso se llama factorización por factor común y consiste en encontrar el factor que se repite en cada término de la suma.

Para factorizar los trinomios que no son perfectos debes identificar el factor común del trinomio, por ejemplo, observa que en el trinomio $P(x) = 6x^5 + 3x^3 + 9x^2$, todos los términos contienen la expresión $3x^2$, por tanto:

$$P(x) = 3x^2(2x^3 + x + 3).$$

Ejemplo

Extraeremos el factor común de dos trinomios.

$3x^4 + 6x^3 + 12x = 3x(x^3 + 2x^2 + 4)$

$24x^5 - 6x^4 + 12x^3 = 6x^3(4x^2 - x + 2)$

Actividad

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Factoriza los trinomios.

$8xy^4 - 10x^3y^5 + 4x^2y^6$	$x^2 + 14x + 49$	$16x^2 + 40x + 25$
$x^2 + 8x + 16$	$3x^3 - 2x^2 + x$	$25x^6 + 30x^4 + 5x^2$

2. Efectúa las operaciones.

a. $(2x-3)^2$ b. $(-\frac{1}{2}+2x)^2$ c. $(-x+2)(-x-2)$

d. $(3x-5)(3x+5)$ e. $(x-2)(2+x)$ f. $(3x-3)^2$

Evaluación y gráfica de funciones cuadráticas

Una función cuadrática de una variable es una función f de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c, son números reales, con $a \neq 0$. Para evaluar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, remplazamos el valor de x por algún valor que pertenezca al dominio de la función. Al tratarse de un polinomio, el dominio será el conjunto de los reales $\mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Evaluaremos la función $f(x) = x^2 + 3x - 2$, en los puntos del conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

x	$y = f(x) = x^2 + 3x - 2$
0	$f(0) = (0)^2 + 3(0) - 2 = -2$
1	$f(1) = (1)^2 + 3(1) - 2 = 2$
2	$f(2) = (2)^2 + 3(2) - 2 = 8$
3	$f(3) = (3)^2 + 3(3) - 2 = 16$
−1	$f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4$
−2	$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 2 = -4$
−3	$f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 2 = -2$

2. Evaluaremos la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4$, en puntos de $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

x	$y = f(x) = x^2 - 4$
0	$f(0) = (0)^2 - 4 = -4$
1	$f(1) = (1)^2 - 4 = -3$
2	$f(2) = (2)^2 - 4 = 0$
3	$f(3) = (3)^2 - 4 = 5$
−1	$f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$
−2	$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$
−3	$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$

3. Evaluaremos la función cuadrática $f(x)=\frac{x^2}{3}+1$ en puntos del conjunto $\{-6, -3, 0, 6, 12, 18\}$.

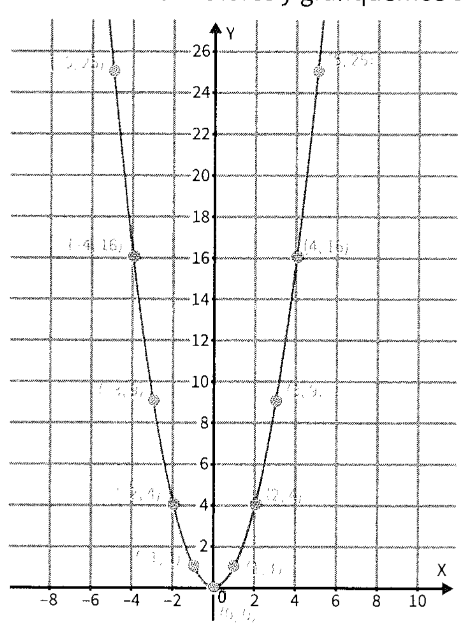
x	$y = f(x) = x^2/3 + 1$
0	$f(0)=\frac{(0)^2}{3}+1=1$
6	$f(6)=\frac{(6)^2}{3}+1=13$
12	$f(12)=\frac{(12)^2}{3}+1=49$
18	$f(18)=\frac{(18)^2}{3}+1=109$
−3	$f(-3)=\frac{(-3)^2}{3}+1=4$
−6	$f(-6)=\frac{(-6)^2}{3}+1=13$

Para graficar una función cuadrática, procedemos de la misma manera que para graficar una función lineal, elaboramos nuestra tabla de valores y después ubicamos los puntos en el plano cartesiano. A diferencia de la gráfica de una función lineal, las funciones cuadráticas se verán como curvas. Necesitamos más de dos puntos. Pero ¿qué clase de curvas son las funciones cuadráticas?

Ejemplos

1. Observa que si en la forma general de la función cuadrática sustituimos los valores $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, obtenemos la función cuadrática simple $f(x) = x^2$.

Hagamos su tabla de valores y grafiquemos uniendo las coordenadas resultantes en el plano:

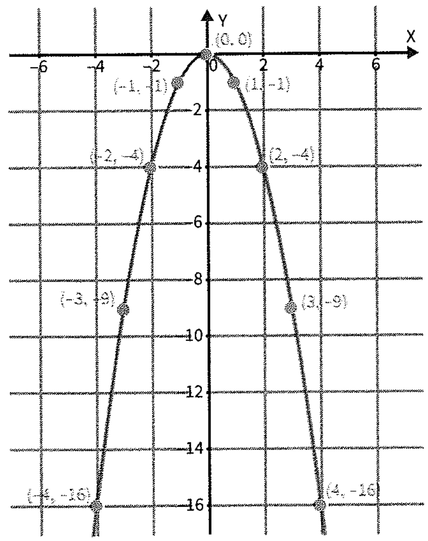


x	$y = f(x) = x^2$	coordenada
−5	$(-5)^2 = 25$	(−5, 25)
−4	$(-4)^2 = 16$	(−4, 16)
−3	$(-3)^2 = 9$	(−3, 9)
−2	$(-2)^2 = 4$	(−2, 4)
−1	$(-1)^2 = 1$	(−1, 1)
0	$(0)^2 = 0$	(0, 0)
1	$(1)^2 = 1$	(1, 1)
2	$(2)^2 = 4$	(2, 4)
3	$(3)^2 = 9$	(3, 9)
4	$(4)^2 = 16$	(4, 16)
5	$(5)^2 = 25$	(5, 25)

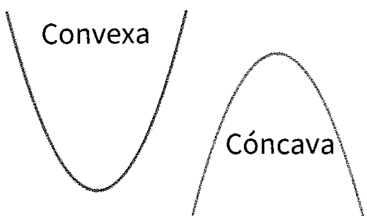
2. Ahora grafiquemos la función $f(x) = -x^2$.

Localicemos y unamos los puntos en el plano cartesiano:

x	$y = f(x) = -x^2$	coordenada
−4	$-(-4)^2 = -16$	(−4, −16)
−3	$-(-3)^2 = -9$	(−3, −9)
−2	$-(-2)^2 = -4$	(−2, −4)
−1	$-(-1)^2 = -1$	(−1, −1)
0	$-(0)^2 = 0$	(0, 0)
1	$-(1)^2 = -1$	(1, −1)
2	$-(2)^2 = -4$	(2, −4)
3	$-(3)^2 = -9$	(3, −9)
4	$-(4)^2 = -16$	(4, −16)



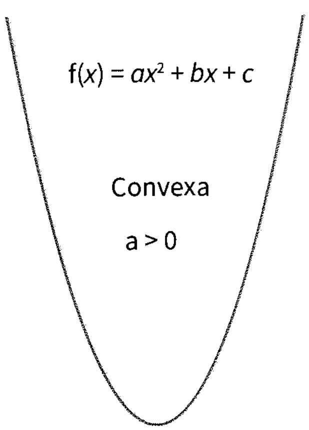
Las gráficas anteriores son convexa y cóncava, respectivamente, como se aprecia en la imagen.

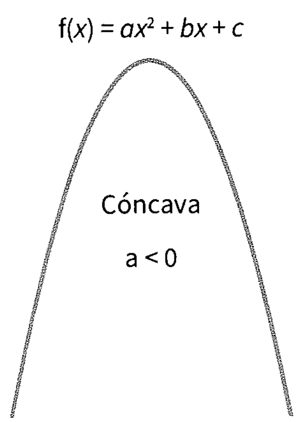


Estas gráficas tienen una forma llamada parábola.

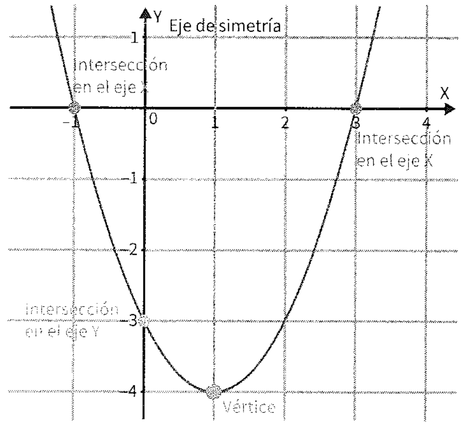
Si tenemos una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c, son números reales y $a \neq 0$, su gráfica tiene una de estas formas:

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba, diremos que su gráfica es convexa, pero si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, la llamaremos cóncava.





Existen otros elementos importantes en una función cuadrática: Eje de simetría, vértice, intersección con el eje X, intersección con el eje Y. Observa la imagen:



El eje de simetría para las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una recta vertical paralela al eje Y, esta recta atravesará la gráfica en efecto espejo, es decir, se reflejará una parte de la otra.

Observa en la imagen anterior que el eje de simetría interseca en el vértice y en el valor de la abscisa de su coordenada. La ecuación del eje de simetría es:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Para el vértice de la parábola, debemos observar que su orientación representa un punto en el plano; este punto es mínimo si la gráfica se abre hacia arriba (cóncava) y será máximo si la gráfica abre hacia abajo (convexa).

Este punto es el vértice de la parábola y se determina con la expresión:

$$v\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Los puntos donde la gráfica de la función cuadrática pase por el eje de las abscisas, eje X, se llaman intersecciones en el eje X; y por ende los puntos que pasen por eje de las ordenadas, eje Y, se llaman intersecciones en el eje Y.

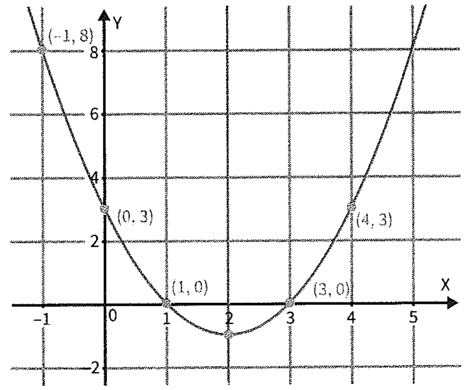
Ejemplo

Graficaremos la función cuadrática, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, identificaremos, además, su vértice, su eje de simetría y los puntos de intersección en los ejes X y Y, si los hay.

Para graficar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, elaboramos nuestra tabla de valores.

Observa que $a = 1 > 0$, por tanto, nuestra gráfica será convexa.

x	$y = f(x)$	coordenada
−1	8	(−1, 8)
0	3	(0, 3)
1	0	(1, 0)
2	−1	(2, −1)
3	0	(3, 0)
4	3	(4, 3)



Observa que para esta función $a = 1$, $b = -4$ y $c = 3$, para el eje de simetría tenemos:

$$x = -\frac{(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Por tanto, el vértice tendrá coordenadas $v(2, f(2)) = v(2, -1)$.

Un *software* que te ayudará a graficar funciones, especialmente las funciones cuadráticas, es GeoGebra, puedes descargarlo gratis de internet, ya que es de licencia libre. Este *software* te servirá para comparar tus gráficas y verificar tus resultados.

Actividad de aprendizaje 6

Grafica las funciones, por medio de las fórmulas determina su eje de simetría, su vértice, obtén los puntos de intersección con los ejes X y Y, si existen.

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$
4. $f(x) = x^2 + x - 1$
5. $f(x) = 2x^2 - 3x - 9$
6. $f(x) = -x^2 - 7$

Ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática

Una ecuación cuadrática en una variable, con coeficientes reales, tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, b y c números reales.

Ejemplo

Las siguientes expresiones son ecuaciones cuadráticas.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$4x^2 + x - 2 = 0$

$\frac{5}{4}x^2 - 6x = 0$

$3x^2 - 9 = 0$

$5x^2 = 0$

Una raíz o solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es un número r, tal que, al sustituirlo en la ecuación por x, se cumple la igualdad.

Es decir, $a(r)^2 + b(r) + c = 0$.

Observa que hay ecuaciones cuadráticas que son trinomios cuadrados perfectos, poseen factores comunes o tienen la forma de un cuadrado igualado a una constante, es decir, pueden ser factorizados para hallar su solución fácilmente.

En otros casos, las ecuaciones cuadráticas tienen un factor común; en todo caso, existe una fórmula general para hallar el valor de x, por tanto, la solución de una ecuación cuadrática es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejemplos

Determinemos las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 63 = 0$.

Identificamos $a = 1$, $b = 2$, $c = -63$.

Aplicamos la fórmula general y obtenemos:

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-63)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 252}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-2 \pm 16}{2}$$

De donde conseguimos dos raíces:

$$\frac{-2 \pm 16}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+16}{2} = 7 \\ \dfrac{-2-16}{2} = -9 \end{cases}$$

Las raíces buscadas r, son $r_1 = 7$ y $r_2 = 9$.

Evaluando en la función obtenemos:

Para r_1: $(7)^2 + 2(7) - 63 = 49 + 14 - 63 = 63 - 63 = 0$.

Para r_2: $(-9)^2 + 2(-9) - 63 = 81 - 18 - 63 = 81 - 81 = 0$.

2. Hallaremos las soluciones de la ecuación $x^2 + 8x = 0$.

   Observa que esta ecuación tiene un factor común x, tenemos $x^2 + 8x = x(x + 8) = 0$, por tanto, hay dos casos:

   Si $x = 0$ y si $(x + 8) = 0$, es decir, $x = -8$.

   Así, las dos soluciones son $x = 0$ y $x = -8$.

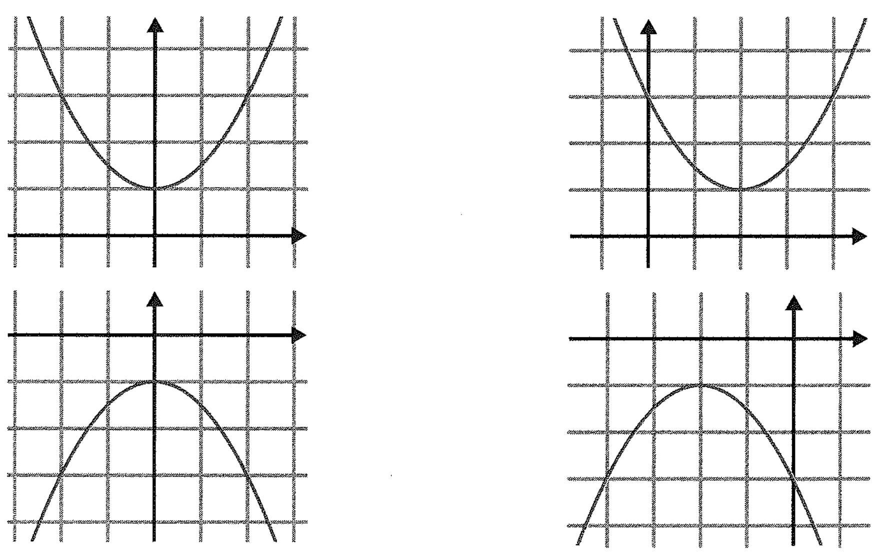
Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se obtienen con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ para $a \neq 0$, b y c números reales, se puede representar gráficamente como una función parabólica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Las raíces o soluciones de esta función $f(x)$ coinciden con los puntos de intersección con el eje de las abscisas, eje X.

Sin embargo, habrá parábolas que no intersequen al eje X, es decir, solo poseen intersección en el eje Y, su gráfica corresponderá a algunas de estas formas:



Para identificar si una función cuadrática tiene intersecciones con el eje X, será de gran ayuda su expresión como ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y con ello la fórmula general para su solución.

Observando el discriminante de una expresión cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es $b^2 - 4ac$, notemos que surgen tres casos:

Los números complejos se conforman por una parte real y una parte imaginaria. La parte imaginaria es una de las raíces de -1 y la denotamos por *i*.

Al sacar la raíz positiva de -4 obtenemos $2i$ y la raíz de -25 será $5i$, estos números complejos se denominan números imaginarios puros.

Si el discriminante es negativo, $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones en el conjunto de los números reales, por lo tanto, su solución corresponde a dos números complejos.

La gráfica de la función cuadrática no interseca con el eje X.

Si el discriminante es positivo, $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

Su gráfica interseca dos veces al eje X.

Si el discriminante es cero, $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real.

Su gráfica interseca al eje X en un punto, llamado vértice.

Si tenemos el caso 2, la ecuación cuadrática es un cuadrado perfecto.

Actividad

Determina si las soluciones de las ecuaciones cuadráticas son reales o complejas, en caso de ser reales, encuéntralas.

1. $x^2 - x + 3 = 0$
2. $2x^2 + 4x = 0$
3. $-x^2 - 3x + 25 = 0$
4. $4x^2 + 16x + 16 = 0$
5. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Tratamiento transversal con el tiro parabólico

Figura 3.1

Tiro parabólico.

¡En la vida diaria encontramos movimiento! Cuando juegas basquetbol y tiras la pelota a la canasta, o en el futbol al patearla, cuando brincas, corres, paseas a tu perro, ¡cuando bailas! En fin, un sinnúmero de movimientos, "el movimiento es vida".

Algunos ejemplos de tiro parabólico son al lanzar un objeto con cierto ángulo, al pegarle a una pelota de golf, aventar cualquier objeto hacia arriba, cuando los proyectiles son lanzados, etcétera.

La trayectoria en el tiro parabólico es una parábola. Existen dos tipos de tiro parabólico:

1. Tiro horizontal. (Figura 3.2).

   Como su nombre lo indica, esta trayectoria se caracteriza por lanzar un objeto de forma horizontal al vacío; el cuerpo lanzado sigue un camino curvo debido a dos movimientos: uno horizontal con velocidad constante y otro vertical con velocidad inicial cero.

2. Tiro oblicuo. (Figura 3.3).

   Se caracteriza por la trayectoria que sigue un cuerpo al ser lanzado con una velocidad inicial, formando un ángulo con el eje horizontal.

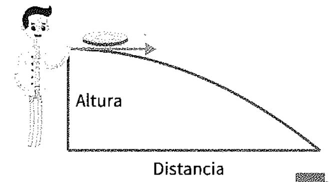


Figura 3.2
Tiro horizontal.

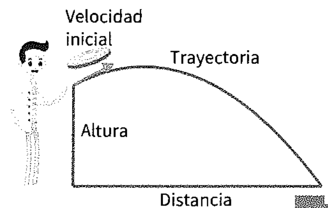


Figura 3.3
Tiro oblicuo.

El tiro parabólico puede considerarse como si estuviera compuesto por dos movimientos: uno rectilíneo y uniforme sobre el eje X y otro uniformemente variado sobre el eje Y.

Cada uno de los movimientos actúa como si el otro no existiera.

Supongamos que los movimientos sobre el eje X y los movimientos sobre el eje Y son representados por la sombra del objeto en ambos ejes, respectivamente. Es decir, cada movimiento actúa sin enterarse de lo que está haciendo el otro.

Este es un principio físico descubierto por el matemático Galileo, y se llama "Principio de independencia de los movimientos".

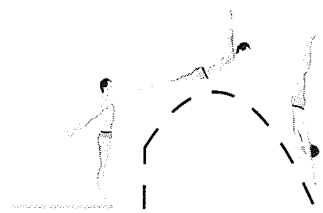


Figura 3.4
Independencia de movimientos.

Del principio de independencia de los movimientos se concluye que el vector velocidad inicial en sus dos componentes es equivalente.

Imaginemos una situación: Estás en tus vacaciones de verano y vas a una alberca, ves a dos chicos, uno de ellos decide tirarse del trampolín; mientras que justo en ese momento, el segundo chico se deja caer de pie (Figura 3.4), ¿cuál de los dos llega primero al agua? ¡Por supuesto! Los dos tocan el agua al mismo tiempo. Puedes intentar comprobarlo y no necesitas una alberca. Ahora un poco de trigonometría. Al tener un triángulo rectángulo, se definen las funciones seno, coseno y tangente de esta forma:

Para la función seno: $\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

Función coseno: $\cos(\alpha)=\frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$.

Y la función tangente: $\tan(\alpha)=\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$.

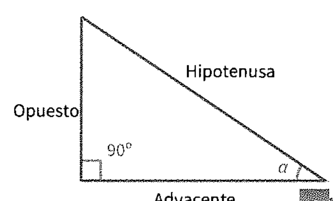


Figura 3.5
Elementos del triángulo rectángulo.

Recuerda los elementos del triángulo para obtener las razones trigonométricas con respecto a sus lados (Figura 3.5).

Las funciones coseno y seno nos ayudan a encontrar las proyecciones de los vectores x (la sombra horizontal del objeto en tiro parabólico) y del vector y (la sombra vertical del objeto en tiro parabólico), respectivamente.

La fórmula para hallar la proyección en el eje X es: $v_x = v \cdot \cos\alpha$ y la fórmula para hallar la proyección en el eje Y es: $v_y = v \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Ecuaciones en el eje X	Ecuaciones en el eje Y
$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} = k \\ a_x = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0y} + gt \\ a_y = g = k \end{cases}$

Donde (x_0, y_0) es el punto inicial con velocidad inicial v_0 de componentes (v_{0x}, v_{0y}), k es una constante, g representa aceleración de la gravedad, es decir, $g = 9.8$ m/s^2 y t el tiempo.

Ejemplo

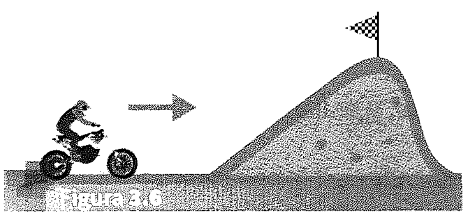
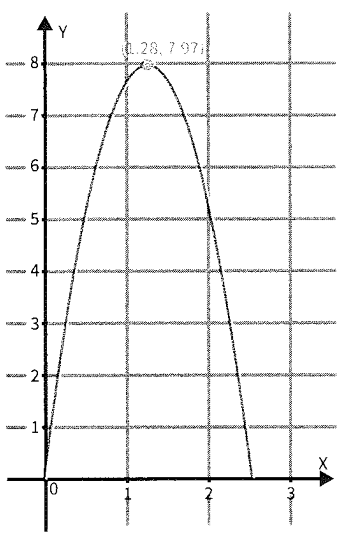


Figura 3.6

Sergio compró una motocicleta de motocross y para probarla salta por una rampa (Figura 3.6).

La ecuación que determina la distancia d, en metros, a la que se encuentra la moto sobre el piso en el tiempo t, en segundos, está dada por $d(t) = 12.5t - 4.9t^2$. A lo que debemos contestar, ¿cuál es la altura máxima a la que Sergio llega?

Para conocer su altura máxima podemos apoyarnos de la gráfica de la función, obtengamos su tabla de valores.



Valor independiente (t)	Variable dependiente $d(t) = 12.5t - 4.9t^2$	Coordenada (t, d)
0	0	(0, 0)
0.5	5.02	(0.5, 5.02)
0.7	6.3	(0.7, 6.3)
1	7.6	(1, 7.6)
1.5	7.7	(1.5, 7.7)
2	5.4	(2, 5.4)

Remarcando la gráfica de la función y la relación existente entre una función cuadrática con la ecuación cuadrática, la ecuación que determina esta situación es $12.5t - 4.9t^2 = 0$, tenemos $a = -4.9$, $b = 12.5$, $c = 0$, aplicamos la fórmula para encontrar el vértice o máximo en nuestro caso:

$$v\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Así, obtenemos $-\frac{b}{2a} = -\frac{12.5}{2(-4.9)} \approx 1.28$ y $d(1.28) = 12.5(1.28) - 4.9(1.28)^2 \approx 7.97$.

El máximo es (1.28, 7.97), como lo muestra la gráfica y su eje de simetría es $x = 1.27$.

Ejemplo

Un helicóptero vuela a 500 m de altura con velocidad de 130 m/s

¿A qué distancia en horizontal de un punto marcado en el suelo deberá entregar ayuda humanitaria para que caiga exactamente sobre la marca?

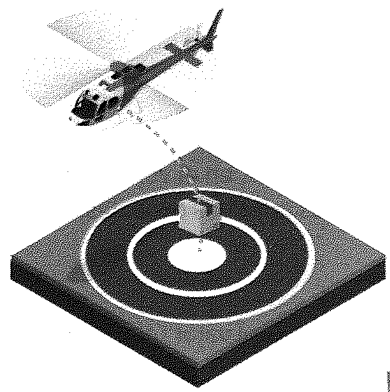


Figura 3.7

Veamos el diagrama en la Figura 3.7.

Las coordenadas de posición son $y_0 = 500$ m, $x_0 = 0$ m.

Como el paquete se deja caer, su velocidad de lanzamiento coincide con la del helicóptero $v_{0x} = 130$ m/s; $v_{0y} = 0$m/s.

Aplicamos la fórmula y despejamos la variable tiempo t:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 500\text{m} + 0 \cdot t - \tfrac{1}{2}(9.8\text{m}/\text{s}^2)t^2.$$

Así, $t = 10.10$ s. En ese tiempo el paquete avanzará horizontalmente:

$$x = x_0 + v_{0x}t \Rightarrow x = 0 + 130\,\text{m}/\text{s}(10.10\,\text{s}) \approx 1313\text{m}.$$

Es decir, el paquete debe lanzarse cuando la vertical del helicóptero esté a x=1 313 m del objetivo.

Actividad de aprendizaje 8

Realiza los siguientes ejercicios.

1. Carlos está practicando clavados en la alberca de su escuela. Si en su último salto del trampolín de 10 m se eleva hasta tres metros por encima de éste, ¿cuánto tiempo dura la caída?
2. Encuentra la altura máxima de un proyectil que es lanzado describiendo una parábola modelada con la ecuación y = −0.5x2 + 2x.

3. El bebé de Mari tira su comida por el borde de una mesa de 70 cm de altura después de empujarla con velocidad de 30 cm/s. ¿A qué distancia de la mesa cae su comida?

4. Julia está por meter gol, ella golpea a 18 m de distancia del portero. El ángulo de salida del balón es de 30° sobre la horizontal y la velocidad con que sale el balón al patearlo es de 15 m/s. ¿A qué altura deberá atajar el portero para que tenga control de la pelota?

Máximos y mínimos de una función cuadrática

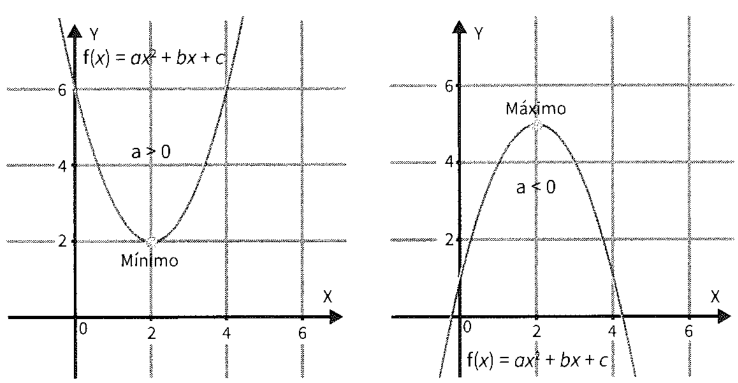
Si tenemos una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, b y c reales, tiene un vértice en:

$$v\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática ocurre en el eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ y más explícitamente, en el vértice de la parábola. Recuerda que para las parábolas no existen máximos y mínimos relativos o locales, todos los que se encuentren serán absolutos. Tenemos estos casos:

Si $a > 0$, el valor mínimo de f es el vértice.

Si $a < 0$, el valor máximo de f es el vértice.



Ejemplos

Sea $f(x) = 3x^2 - 15x + 27$ una función cuadrática.

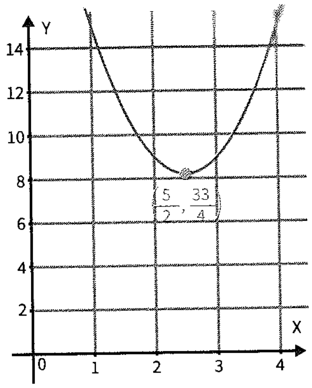
Determinaremos si tiene máximo o mínimo, según sea el caso.

Observa que $a = 3$, $b = -15$, $c = 27$ y $a = 3 > 0$, así, la función cuadrática tiene un mínimo. Hacemos las operaciones correspondientes:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-15}{2(3)} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \text{ y } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{5}{2}\right) + 27 = \frac{75}{4} - \frac{150}{4} + \frac{108}{4} = \frac{183}{4} - \frac{150}{4} = \frac{33}{4}.$$

Por consiguiente, el mínimo se alcanza en el punto $v(\frac{5}{2},\frac{33}{4})$.

Con ayuda del *software* Geogebra, tenemos la gráfica:



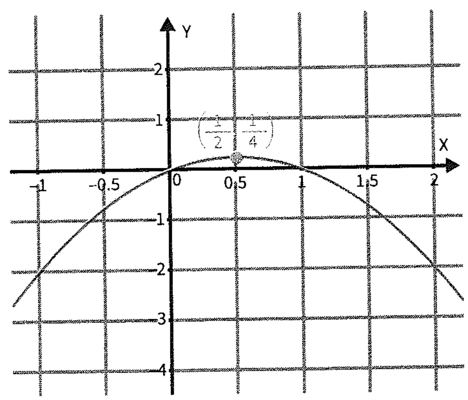
2. Encuentra el máximo o mínimo de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x$.

En este caso $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, además, $a = -1 < 0$, por tanto, la función tiene un máximo.

Efectuamos las operaciones:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \text{ y } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Así, el máximo se alcanza en el vértice $v(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. Observemos su gráfica:



Actividad de aprendizaje 9

Encuentra el máximo o mínimo, dependiendo el caso, de las funciones cuadráticas.

1. $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$
3. $f(x) = -x^2 + 4$
4. $f(x) = 3x^2 - 2x$

Interpretación de las soluciones de la ecuación cuadrática

Estamos seguros que te has dado cuenta que estos últimos temas han sido un poco repetitivos, pero cambiemos lo dicho: estos temas tienen relación entre sí, ¡vaya que sí!

¿Recuerdas cómo resolver una ecuación cuadrática?

Puede ser resuelta por factorización o por la fórmula general. Hay otra forma de saber su solución, ¿puedes imaginar cuál? ¡Por supuesto! La forma gráfica de una ecuación cuadrática.

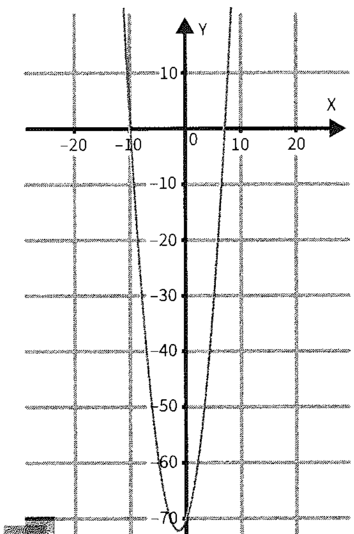


Figura 3.8

Como vimos, la gráfica de una ecuación cuadrática es una parábola y dependerá del coeficiente a, su orientación y concavidad.

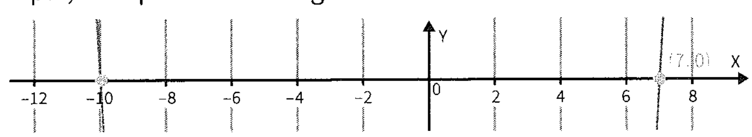
Si deseamos resolver la siguiente ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 70 = 0$, tenemos los coeficientes $a = 1$, $b = 3$, $c = -70$ y $a = 1 > 0$, por tanto, la parábola se abre hacia arriba, observa la Figura 3.8.

De manera gráfica, las soluciones de esta ecuación se tomarán de los puntos de intersección en el eje X, pues en estas coordenadas el valor de la variable y es cero. ¿Cómo localizar dichos puntos? Puede ser a simple vista "a ojo de buen cubero", tomando en cuenta que debe ser comprobado.

Te puede ser de gran ayuda un *software*, como Geogebra, para comprobar las coordenadas de esos puntos, o algebraicamente, utilizando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para nuestro ejemplo, acerquemos más la gráfica:



Es decir, los puntos de intersección en el eje X son $(-10, 0)$ y $(7, 0)$, por tanto, las soluciones para la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 70 = 0$ son: $x = -10$ y $x = 7$.

Aplicando la fórmula general a esta ecuación, comprobamos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-70)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3+17}{2} = 7 \\ \dfrac{-3-17}{2} = -10 \end{cases}$$

Actividad de aprendizaje 10

Realiza las siguientes actividades.

5. Usando el procedimiento gráfico, resuelve las ecuaciones cuadráticas
   a. $x^2 + 15x + 56 = 0$
   b. $6x^2 + 7x - 3 = 0$
   c. $x^2 - 23x + 120 = 0$
   d. $x^2 + 3x - 88 = 0$
   e. $x^2 + x - 72 = 0$
6. Grafica las siguientes funciones, determinando su máximo, mínimo, intersecciones con los ejes y si es cóncava o convexa.
   a. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$
   b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
   c. $f(x) = x^2 + 5x - 2$
   d. $f(x) = 2x^2 - x + 1$

Actividad de aprendizaje 11

Productos esperados

Realiza las actividades e intégralas a tu portafolio como evidencia de aprendizaje.

1. En esta parte de la actividad, elaborarás un problemario de compendio de actividades del uso de la ecuación cuadrática.

   Iniciarás con los problemas que resolviste en esta unidad, además de buscar en internet o compartir con tus compañeros experiencias donde crean que hay uso de la ecuación cuadrática. ¿Cómo pueden identificarla? ¿Qué valores necesitarán?

   Como mínimo deberás plantear un problema más acerca de cada tema de esta sección; además, anexarás las preguntas con sus respectivas respuestas:

   a. ¿Qué tema te gustó más?
   b. ¿Qué puedes concluir?
   c. ¿Crees importante y/o necesario el uso de las ecuaciones cuadráticas?
2. En la última sección se propuso trabajar con Geogebra, te mostraremos el uso que puedes darle, elaborando tu propio generador de gráficas para funciones cuadráticas.
   a. Geogebra. Es un *software* libre, gratuito y es multiplataforma, es decir, lo puedes usar en una PC, laptop, mac, tablet, celular o navegador de internet. Busca la forma más conveniente para trabajar con este programa en su portal: www.geogebra.org.

Recuerda las fórmulas para el vértice y el eje, la forma general de una función cuadrática y ¡manos a la obra!

Tipea la forma general de una ecuación cuadrática: a*x^2+b*x+c, confirma en el cuadro de diálogo para crear deslizadores, si aparece.

Comprueba que se haya asignado f como nombre a tu función, de otro modo empieza con un documento nuevo.

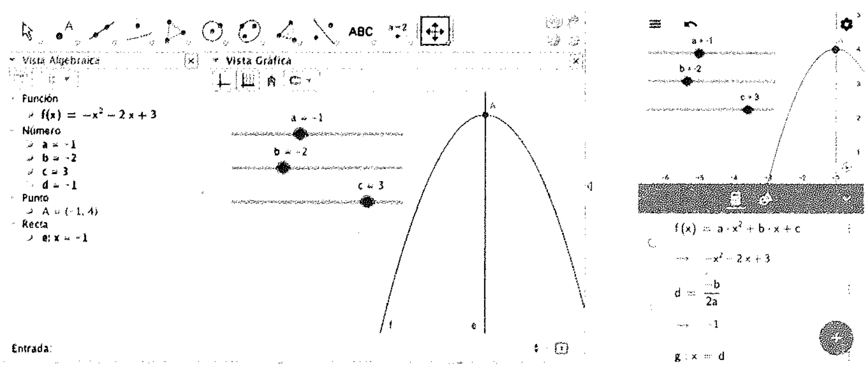
Llamaremos *d* al número $-\frac{b}{2a}$ de la parábola, escribe: d=-b/(2*a).

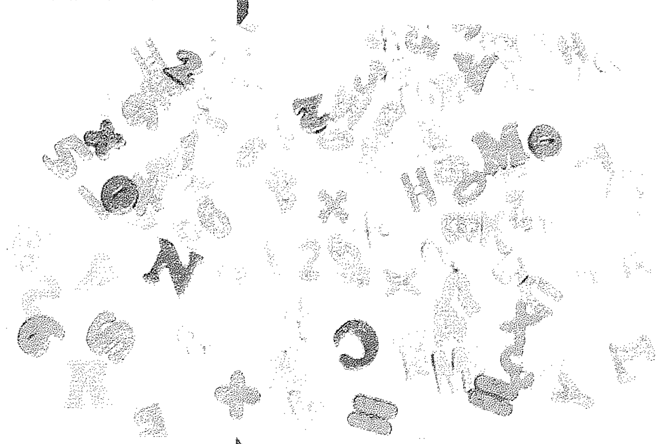
Obtenemos el eje de la parábola con: x = d.

Y el vértice, escribiendo: (d,f(d)).

Ahora todo está listo para estudiar funciones cuadráticas, mueve los deslizadores, revisa en la vista algebraica las coordenadas del vértice y la ecuación del eje. Utiliza esta aplicación para comprobar tus ejercicios y guárdalo como: funcion_cuadratica.ggb.

Explora, entiende lo que ocurre y mejora tu comprensión en los temas vistos.





Lenguaje algebraico

En la época de Al-Juarismi (matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán) se creó el lenguaje algebraico en el marco de la civilización musulmana, alrededor del año 800. Debemos las palabras álgebra, guarismo y algoritmo a la obra principal de dicho matemático: el compendio de cálculo por reintegración y comparación.

Por esta razón, Al-Juarismi también es conocido como el padre del álgebra y figura como portada en algunos libros de dicha rama de las matemáticas.

Suma anécdota

Leonhard Euler fue un verdadero niño prodigio y no sólo para las matemáticas, pues tenía un don especial para los idiomas y destacaba en todos los estudios que realizaba.

Su prodigiosa memoria y su capacidad mental para el cálculo le permitieron realizar complicados cálculos aritméticos sin necesidad de utilizar papel y lápiz.

Durante su estancia en San Petesburgo, Euler debía atender a sus tareas en la Academia y a los requerimientos como asesor del gobierno ruso, que le nombró director del Departamento de Geografía y comisario de pesas y medidas. Para entonces, ya había escrito más de ochenta trabajos en la *Revista de investigación*. En fin, podemos usar todo este libro para describir todos los trabajos y logros realizados por el matemático Euler, a él se le atribuyen muchos logros.

Durante toda su vida se dedicó al estudio de las matemáticas, en ningún momento se detuvo, esto lo llevó a contraer una enfermedad de la vista, a los 33 años, que acabó ocasionándole la perdida de la visión de un ojo. Pero esta ceguera parcial no le impidió seguir trabajando con la misma intensidad... vaya que Euler tenía clara su vocación ¿no crees?

Se decía de él:

> "...Podía hacer matemáticas sin ningún esfuerzo, exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire".

De cualquier modo, Euler debió en algún punto de su vida establecer prioridades, pensar en las gratificaciones a corto y largo plazo y decantarse por lo que él consideraba mejor.

Reflexiona sobre lo leído y contesta:

- ¿Crees que sólo el talento es suficiente para tener gratificaciones?

  ____

- ¿Qué puedes desarrollar y en qué te puedes enfocar para tener gratificaciones a largo plazo?

  ____

- ¿En qué lugar te imaginas que podrías estar en 10 años?

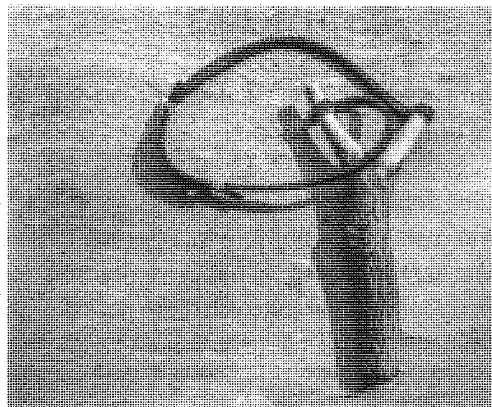
  ____

- ¿Qué estás dispuesto a invertir o sacrificar para estar donde imaginas?

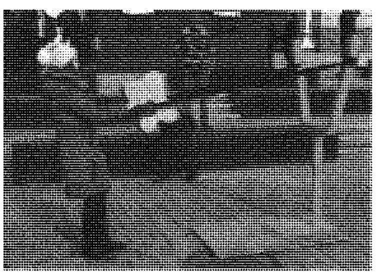
  ____

Proyecto integrador

En este proyecto realizarás una pequeña investigación de campo. En equipos de tres integrantes construirán una ¡resortera!

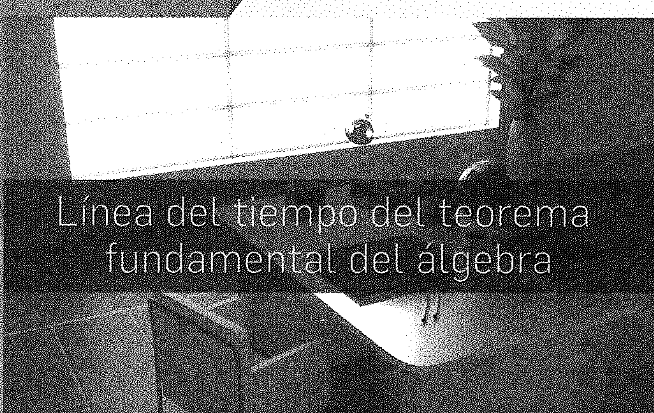


1. Investiguen acerca del tiro parabólico. Localicen su origen, sus usos y cómo funciona.
2. Hay diversas formas de hacer una resortera. ¿Cuál creen que sea la mejor opción? Elaboren un bosquejo.
3. ¡Hagan su resortera! Recuerden que es mejor el uso de materiales al alcance y reciclados. En las imágenes se muestran algunos ejemplos de resorteras, hagan la que prefieran.
4. Realizarán lanzamientos de un proyectil, elijan uno conveniente para la actividad, por ejemplo, una bola de papel. Serán dos lanzamientos: tiro parabólico horizontal y oblicuo, eligiendo el obstáculo que más crean conveniente.



5. ¿Qué factores influyen en sus lanzamientos? ¿A mayor distancia mayor velocidad? Si disminuye la fuerza de lanzamiento, ¿qué sucede? Si eligen algún otro proyectil con mayor o menor peso, ¿qué sucede? Justifiquen el procedimiento con el uso de funciones cuadráticas que modelen la trayectoria parabólica de su proyectil lanzado. Ayúdense de los conceptos vistos.
6. Por último, escriban una bitácora acerca del procedimiento que siguieron, las fallas y logros de su proyecto. Compartan sus experiencias con sus compañeros.

Digital



El teorema fundamental del álgebra

La matemática es una ciencia que se ha ido consolidando a través de los años, muchos años. Su estudio se remonta a las antiguas civilizaciones y actualmente se siguen estudiando problemas y teorías que nos siguen dando sorpresas.

Notarás que el teorema fundamental del álgebra tiene pocos años de uso, comparado con el teorema de Pitágoras, por ejemplo, y aunque parece muy normal su uso, la demostración tardó bastante tiempo en consolidarse.

Hacia la prueba Planea

Utiliza esta sección para preparar tu prueba Planea.

1. Las ecuaciones $y = 2x + 3$ y $y = 2x + 5$ representan:
   a. La misma recta.
   b. Dos rectas que se intersecan en un punto.
   c. Dos rectas paralelas.
   d. Dos rectas perpendiculares.

2. Las rectas $y = 2x$ y $y = 3x$ se intersecan en:
   a. (2, 3)
   b. (3 , 2)
   c. (1, 1)
   d. (0, 0)

3. Hallar la pareja de números cuya suma da −1 y su diferencia es 1:
   a. (0, 1)
   b. (0, −1)
   c. (1, 0)
   d. (−1, 0)

4. La solución del sistema compuesto por $x + 2y = 0$ y $3x + 4y = -2$ es:
   a. $x = 1, y = -2$
   b. $x = -2, y = 1$
   c. $x = 1, y = 2$
   d. $x = 2, y = 1$

5. Las funciones $f(x) = x - 4$ y $g(x) = -x$ se intersecan en el punto:
   a. (2, 2)
   b. (−2, 2)
   c. (2, −2)
   d. (−2, −2)

6. Encuentra las coordenadas del vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 1$:
   a. (−2, −3)
   b. (−2, 3)
   c. (2, −3)
   d. (2, 3)

7. La parábola de ecuación $f(x) = x^2 + 4x + 4$ tiene eje de simetría en:
   a. $x = -2$
   b. $x = 0$
   c. $y = 0$
   d. $y = -2$

8. En cierta ecuación cuadrática encontramos $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$, ¿cuál afirmación es falsa?
   a. La parábola es convexa
   b. La parábola tiene dos raíces
   c. El vértice está en el segundo cuadrante.
   d. El discriminante es negativo

9. Al evaluar $f(x) = -x^2 - x$ en $x = -1$, obtenemos:
   a. −2
   b. −1
   c. 0
   d. 2

10. El discriminante en $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ es:
   a. 8
   b. 0
   c. −8
   d. −12

Evalúa tus evidencias

Utiliza la lista de cotejo para identificar lo que dominas con base en las evidencias generadas y guardadas en tu portafolio.

Productos	Criterios	Sí	No
Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, analítica y gráficamente. Actividad 4.	Presentas información verídica, clara y basada en una investigación profunda.		
	Ejemplificas correctamente las situaciones requeridas.		
	La explicación en la diferencia del uso de cada método, así como sus ventajas y contras sobre los otros es clara y oportuna.		
Expresar las soluciones de ecuaciones cuadráticas. Actividad 11.	Resuelves correctamente los problemas.		
	Tu investigación cuenta con información confiable y los datos corresponden a lo solicitado.		
	Muestras los problemas en orden, la aplicación funciona y muestra correctamente cualquier parábola solicitada.		

Rúbrica

Con base en la rúbrica, identifica tu nivel logrado en cada aprendizaje esperado. Recuerda repasar los temas para mejorar.

Aprendizajes esperados	Básico	Autónomo	Estratégico
Simboliza y generaliza fenómenos lineales y fenómenos cuadráticos mediante el empleo de variables.	Expreso fenómenos lineales y cuadráticos de forma clara y directa.	Utilizo formas equivalentes para mejorar la comprensión de mis expresiones.	Entiendo los fenómenos que dan lugar a las situaciones lineales y cuadráticas y puedo relacionarlos algebraicamente.
Opera y factoriza polinomios de grado pequeño.	Conozco las operaciones y factorizaciones básicas de un polinomio.	Entiendo las factorizaciones y distingo su uso.	Realizo múltiples factorizaciones en una misma expresión.
Significa, gráfica y algebraicamente, las soluciones de una ecuación.	Comprendo las situaciones que dan lugar a distintas raíces.	Identifico en las factorizaciones y el discriminante a las raíces de un polinomio.	Entiendo cómo se comportan las funciones al variar sus parámetros.
Interpreta la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	Identifico la intersección de dos rectas y su interpretación algebraica.	Infiero si dos rectas pueden tener intersección por su forma.	Puedo predecir el comportamiento y visualizar las rectas con su forma algebraica.

En Book Mart nos ocupamos de proporcionar a nuestros clientes paquetes integrales de soluciones didácticas; por ello, nuestros libros de texto se acompañan de un conjunto completo de herramientas cuyo objetivo es contribuir a la optimización del proceso de aprendizaje en los estudiantes. Estos materiales se enfocan en ofrecer opciones auténticas que se adaptan a todos los estilos de aprendizaje y al desarrollo de competencias en todas las áreas del conocimiento. Hoy más que nunca, es de vital importancia ofrecer una propuesta didáctica desafiante y atractiva, que logre superar la tendencia a la deserción, apegada por completo a los lineamientos de nuestro sistema educativo nacional y con materiales de la mejor calidad.

Estudiantes y facilitadores encuentran un gran apoyo en nuestros materiales didácticos integrales que incluyen lo siguiente:

Libro del estudiante

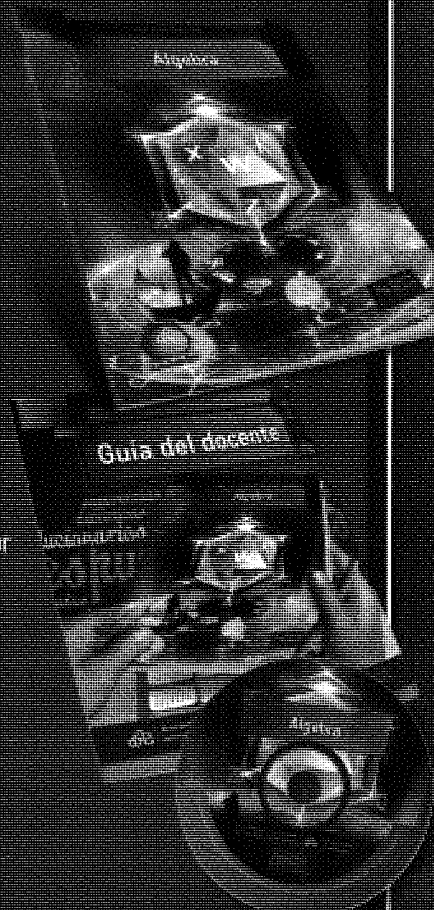
- Aplicación gratuita para teléfono móvil

Guía del docente

- Respuestas del libro

CD para el docente

- Planeación argumentada
- Lecturas adicionales
- Actividades adicionales
- Reactivos de evaluación adicionales
- Información básica para el docente actual de Educación Media Superior
- Propuesta metodológica
- Orientación para la evaluación docente para la permanencia
- Sugerencias para proyectos transversales
- El problema actitudinal (Construye T)
- Recursos innovadores



www.bookmart.com.mx
Lada nacional sin costo
01 800 101 63 48

ISBN: 978-607-743-872-4